関数における速さの理解についての中１生徒の実態

東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会

１　研究のねらい ……　１ページ
２　関数学習における「負の速さ」の捉え方
(1)　小・中の算数・数学における「速さ」に関する学習の繋がり　……　１～２ページ
(2)　「正負の数」と「速さ」の指導上の課題 ……　２～３ページ
(3)　関数指導における「速さ」の定義　……　３ページ
(4)　「速さ」に関する指導方針 ……　４ページ
３　「速さ」と「正負の数」に関する実態調査
(1)　調査のねらい　……　５ページ
(2)　調査対象と調査問題　……　５ページ
４　結果の考察と提言
(1)　各問の結果と考察　……　６～１４ページ
(2)　指導への提言　……　１４ページ
(3)　中１関数指導計画　……　１５ページ
(4)　第６時学習指導案　……　１６ページ
(5)　第 14 時学習指導案 ……　１７ページ
５　まとめと今後の課題 ……　１８ページ
引用・参考文献 ……　１８ページ

１　研究のねらい

本委員会のこれまでの研究で，速度を「向きをもつ速さ」として捉えることや，関数における速度の理解に課題があることがわかった．そこで昨年度は，速さの概念と関数の密接な関係，例えば「同一平面上の速さに関する $y=ax$ のグラフ(x：時間，y：距離)は，a の絶対値が等しく符号が反対ならば，反対の向きをもつ等しい速さを表すこと」を，生徒に理解させることをねらいとして，授業研究を通して考察をしてきた．[1)]

本年度は，そのねらいをさらに深めるために，中１において，次の２点を研究のねらいとして研究授業を実施するとともに，関数における速さの理解について，実態を調査することにした．

Ⅰ　昨年度の「グラフをかく指導における，正負の数の指導との繋がりをつける速さの理解」についての研究授業・研究協議から見いだした指導課題を踏まえ，改訂指導案を作成した．その改訂指導案での研究授業を実施し，指導の妥当性を明らかにする．

Ⅱ　「関数の利用」における速さの概念と関数の理解を深める指導について，指導前の生徒の実態の把握，指導案の作成，研究授業・研究協議を経て，指導の妥当性を明らかにする．[2)]

２　関数学習における「負の速さ」の捉え方

(1)小・中の算数・数学における「速さ」に関する学習の繋がり

① 小５：単位量あたりの大きさと意味についての指導

ア．同種の２量で割合を表す値

イ．異種の２量で割合を表す値

（例）ひなさんの家の 60m^{2}の畑からは 315ｇ，はるさんの家の 90m^{2}の畑からは 468ｇの大根が穫れました．どちらの畑の方が取れ高がよいといえるのでしょうか．

② 小６：小５の異種の２量の割合の学習を受けて，速さが「時間」と「道のり」の２つの量

に関係していること，どちらが速いかを比べるにはどのようにすればよいかを考えること，について学習する．そして，単位量あたりに進む道のりを速さとし，速さの定義を知る．

③ 中１:「正負の数」では，時速○km で東の方向に進み，１時間後，２時間後の位置などを問う．
「文字と式」では，(速さ)×(時間)の言葉の式を利用して，文字を使い，道のりや速さを文字式で表す．
「１次方程式」では，１次方程式を使い，速さに関する問題を扱う．

※平成 29 年度告示学習指導要領では，②は小５に移行

このような流れで学習が展開され，「正負の数」の単元では，数の範囲を負の数まで拡張することにより，

（ａ）反対の方向や性質をもった数量を，基準を定めて＋や－を用いた数で表すこと
（ｂ）反対の向きの量を統一してみること
（ｃ）四則計算

ができるようになる．中１の関数学習に至るまでは，次の流れをとる．

正負の数 ⟶ 文字と式 ⟶ １次方程式 ⟶ 関数

つまり「正負の数」の単元では数の範囲の拡張を，関数学習では座標平面を第Ⅰ象限から全象限への拡張を行う．

(2)「正負の数」と「速さ」の指導上の課題

① 教科書に関して

昨年度実施した教科書調査[2)]では，正負の数の乗法における，道のり・時間・速さに関することは，次のように大別された．

ア　小６の速さの定義に反対の方向という意味だけを添え，図等で示し，マイナスの速さを表している．
(例)東に向かって走る自動車を小６の道のり・時間・速さの関係を使って説明する．
その後，自動車が西へ向かって時速 80km で走ることを課題に設定した後，
時速－80km という速さが，数直線上に唐突に与えられている．

イ　小６の速さの定義にマイナスの位置や距離，時間を与え，マイナスの速さが表されている．
(例)東に向かって走る自動車を小６の道のり・時間・速さの関係を使って説明する．
その後，自動車が西へ向かって時速 80km で走ることを，東の方向に対する意識が弱いまま，西へ進むというだけで，時速－80km で走るといい表す．

ウ　小６の速さの定義にマイナスの位置や距離，時間を与え，反対の向きの速さを１つの言葉で表現している．
(例)東に向かって走る自動車を小６の道のり・時間・速さの関係を使って説明する．
その後，東の方向を正の方向とし，西へ向かって時速 80km で走ることを，
東へ向かって時速－80km で走るといい表す．

このように，現行の教科書では，向きをもつ速さについて，その背景となる学習や概念を十分に考察しないまま，正負の数や１次関数などにおいて，突然「マイナスの速さ」を与えている傾向にあり，学習の混乱をまねいている．正負の数において，時間や位置・道のりなどを表すことについて学習してきたが，速さについては，その道のり・時間の異種の２つの量の割合であり，向きをもつことも加えれば，単純な概念ではない．小６の定義に従って，「正負の数」の単元で簡単にマイナスの速さを定義してよいのだろうか．

また，本研究に関わる先行研究として，大西康太・中西正治[3)]の研究があげられる．大西らは教科書には正負の数の見方が次のような３通りあることを指摘している．

・ 500 円の収入を＋500 円と表すとき，400 円の支出は－400 円のように，２つの相反する要素に対して正負の数を用いる場合．
・ 基準，得点 10 点に対して，どれだけ多いか少ないか．７得点は－３得点．

・「３個少ない」ことを，－３を使い「－３個多い」と表す．多い，少ないの一方の言葉「多い」を使い状態を表す．

関数指導においては,「中２の変化の割合で，一方の言葉「増加量」と正負の数＋，－を使用し，一方の言葉「y の増加量－３」など増減を表現し，１つの言葉で表現している.」など,「正負の数」との関連の学習の困難性を生じさせていることを指摘している．

②「正負の数」と「関数」との繋がり

本委員会は，①の課題に焦点をあて，関数における速さに関する学習については，次の３点を中心に研究を進めてきた．

・速さの意味を変化の割合を通して理解し，グラフのよみで，速さの概念を捉え直そうとすること． ・関数$y = ax + b$ の a の値が変化の割合を表すとともに，向きをもつ速さ(速度)として正負の両方の値を取ること，それらが反対の向きの量を表すということを理解すること． ・関数$y = ax + b$ の b の値が基準の時間における位置を表すことを理解すること．

この研究を進める中で,「正負の数」と「速さ」を関連づける指導において，次の課題を見いだした．

・グラフをかく初期の指導で，座標平面上の第Ⅰ象限から全象限の拡張の際に，正負の数の意味との繋がりをつけること．

・正負の数では，例えば，東西の移動のみで，直線上での動きの扱いであるが，関数では座標平面上での扱いとなることに理解の困難性が上がる．

・関数 $y = ax$ のグラフは，a の符号が変わると，グラフの傾き方が変わる．それとともに，例えば「Ｏを基準に，東の方向を正の方向とすると，西へ向かって時速 80ｋｍで進むことは，東へ向かって時速－80ｋｍで進むことを表す」のようにその変化量も反対の向きになる．このような事例において，グラフと実際との関連づけが意識しづらい．

・座標平面や変数 x ，y ，比例定数a を負の数まで拡げているにもかかわらず，利用や活用の場面では比例定数は $a > 0$ のみで，グラフも第Ⅰ象限のみで問題解決をしており，比例定数が $a < 0$ であるような課題場面が設定されておらず，具体的な場面での問題解決に活かされていない．

(3)関数指導における「速さ」の定義

向きをもつ速さについては，生徒に無理のない指導過程を踏み，その定義をすることが重要である．向きをもつ速さは，正負の数，数の拡張，関数学習の変域の拡張，グラフの第Ⅰ象限から全象限への拡張などの学習内容を十分に踏まえ，生徒の理解の立場に立った指導を考えなければならない．

以上のことから，本委員会では，中学校の符号のついた速さについて，

(速さ)＝(正負の数を使って方向を表した道のり)÷(時間)

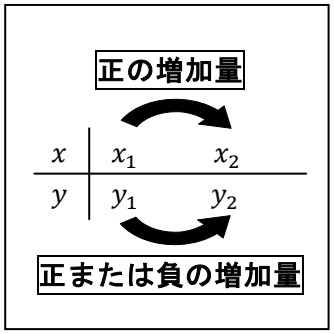
と定義する．

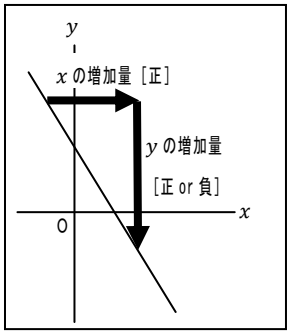
ここでいう速さは，変化の割合，すなわち

(y の増加量)／(x の増加量)

を求めるときの指導のように，x の増加量は正の増加量として捉え，y の増加量は正負のどちらかの増加量として捉えさせる．

（右図参照）

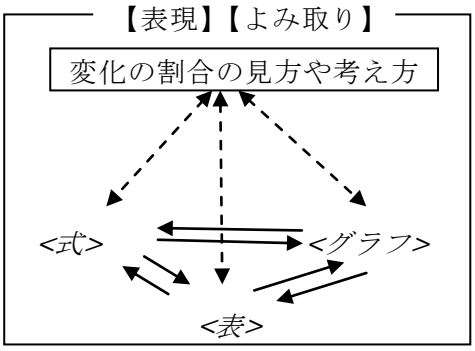




(4)「速さ」に関する指導方針

① 表現・よみ取りに関する指導方針

これまで，全学年を通して，右の図のような表・グラフ・式を一体化した指導が必要であり，その指導を通して，【表現】【よみ取り】に「変化の割合」の見方や考え方を考察の道具として利用していくことが重要であることを述べてきた．速さに関する関数学習においても，速さと変化の割合を関連させ，その考察を通して学習を深めることを重点としてきた．「向きをもつ速さ」は，変化の割合そのものである．つまり，速さに関する学習場面でも右の図の関係を意識した展開の指導方針をとる．



② 「正負の数」と「速さ」に関する指導方針

中学校関数指導において「向きをもつ速さ」を導入するにあたり，本委員会が提案する「速さ」を基本的な学習の中で定義する．表・グラフ・式などを関連させながら，必然性のある場面で，負の速さを使う．また，「関数の利用」でも，負の速さが使われるような必然性に迫る課題を設定し，問題解決を図るような指導計画を立てる．

例えば，負の速さのグラフ指導の課題として，時速５km で北の方向に行くことを時速５kmとする場面を考えさせると，時速５km で南の方向に行くことは，北へ時速－５km と表すことができる．同一座標平面上でその２つの速さをグラフに表すと，一方は右上がりの直線，もう一方は右下がりの直線になる．また，その２つのグラフは a の絶対値が等しく符号が反対なので，反対の向きをもつ等しい速さを表すことを理解させることができる．これによって，正負の数を使って統合的に捉えた向きをもつ速さの概念が深まっていく．

また，「関数の利用」でも同様に，日常生活の場面で負の速さが使われる課題を扱う．その際，通常では，x から y を求める指導であるが，ここでは，y から条件に合う x を探すような課題を設定し，問題解決力を養う．

3　「速さ」と「正負の数」に関する実態調査

(1)　調査のねらい

反対の向きをもつ量や，速さの意味についての中１生徒の理解の実態を把握する．

(2)　調査対象と調査問題

調査対象…都内公立中学校３校　第１学年 179 名

＊調査対象は、関数委員会の指導計画による指導を受けていない生徒である。

実施時期…2017 年 1～3 月　調査時間…30 分

調査問題

1　次の①～②に答えなさい。

①　東西に通じる道路上で，ある地点から東へ５ｍ進むことを「＋５ｍ」と表すとき，次のことがらを，＋，－を使って表しなさい。

ア　ある地点から東へ６ｍ進むこと　　イ　ある地点から西へ７ｍ進むこと

②　ある時刻から３分後の時刻を「＋３分」と表すとき，次の数量は，ある時刻からどのように表せますか。

ア　＋６分　　イ　－７分

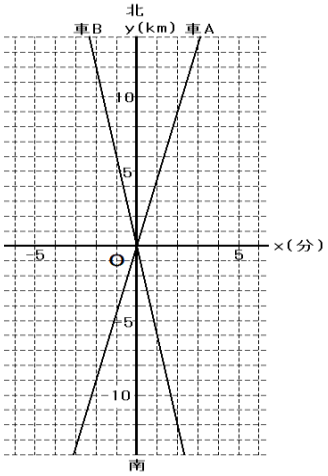
2　x 時間歩いたときの道のりを y km とし，x，y はともなって変わる数量です。次の①，②の場合について，答えなさい。

①　x と y の関係が，$y = 4x$ のとき，この x の係数 4 はどんな数量を表していますか。また，それはどんな単位がつきますか。

②　x と y の関係が次の表であるとき，歩いた速さを求めなさい。

x（時間）	0	2	4	6
y（km）	0	6	12	18

3　南北に通じる道路上を，車Ａと車Ｂは走っています。右のグラフは，ある時刻の地点を基準Ｏとし，車Ａ，車Ｂの進行のようすを表したものです。次の①，②に答えなさい。

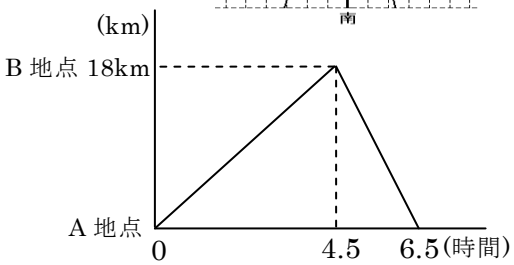


①　車Ａの速さを求めなさい。

②　車Ｂの速さを求めなさい。

③　グラフを見て気づいたことを５つあげなさい。

4　一定の速さで流れている川があります。右の図は，この川のＡ地点から 18km 離れたＢ地点までの，船が往復する進行のようすを表したものです。次の①～③に答えなさい。



①　Ａ地点からＢ地点へ行くときの船が進む速さを求めなさい。

②　Ｂ地点からＡ地点へ行くときの船が進む速さを求めなさい。

③　①と②の船の速さは同じですか，違いますか。また，その理由も答えなさい。

4　結果の考察と提言

(1)　各問の結果と考察

【調査問題1】

①について

①ア　反応	人数(人)	割合
＋6	46	25.7%
＋6m	126	70.4%
＋6m進む	1	0.6%
誤答	6	3.4%
計	179	100.0%

①イ　反応	人数(人)	割合
－7	47	26.3%
－7m	124	69.3%
－7m進む	1	0.6%
誤答	7	3.9%
計	179	100.0%

●考察

9 割の生徒が正解している。

（単位を付けていない生徒も 2 割ほどいるが，内容の理解には問題がないと考えられる。）

②について

②ア　反応	人数(人)	割合
6 分後	87	48.6%
ある時刻から 6 分後	70	39.1%
－6	1	0.6%
誤答	6	3.4%
＋6 分ぶん量が増えた	1	0.6%
＋9 分	2	1.1%
－6	1	0.6%
x ＋6 分	2	1.1%
はやく着く	1	0.6%
＋9 分	3	1.7%
－6 分	1	0.6%
時刻から 3 分後の時刻	2	1.1%
無答	2	1.1%
計	179	100.0%

②イ　反応	人数(人)	割合
7 分前	88	49.2%
ある時刻から 7 分前	71	39.7%
＋7	1	0.6%
誤答	5	2.8%
－7 分ぶん量が減った	1	0.6%
－4 分	2	1.1%
＋7	1	0.6%
x －7 分	2	1.1%
遅く着く	1	0.6%
－10 分	2	1.1%
＋7 分	1	0.6%
時刻から 7 分前の時刻	2	1.1%
無答	2	1.1%
計	179	100.0%

●考察

8 割の生徒が正解している。

問題文に，「ある時刻から」と示しているので，回答には「ある時刻から」という文言を書いている生徒と書いていない生徒がいた。ここでは，両方とも，内容の理解には問題がないと考えられる。

●全体のまとめ

①は 90%以上，②は 80%以上と，正答率は高い。また，①の無答率は 0%，②の無答率は 2%である。正負の数の単元で学習した「反対の向きを持つ量」については，正答率も高く，定着しているものと考えられる。

【調査問題2】

①について

①数量　反応	人数(人)	割合
01:速さ・時速 4km・時速	52	29.1%
02:1 時間を時速何 km で歩いてきたか	1	0.6%
03:1 時間を歩くときの速さ	4	2.2%
11:1 時間で歩くときの道のり	16	8.9%
12:1 時間歩いたときが 4km	1	0.6%
21:4km ずつ進む	1	0.6%
51:x 時間で歩いたときが 4km	4	2.2%
52:4 時間ずつ歩く	1	0.6%
61:歩いた道のり	6	3.4%
62:4km	3	1.7%
63:4000　※ただし単位は km としている	1	0.6%
71:ykm を 4x 時間で歩いた	5	2.8%
72:4x・x の 4 倍	8	4.5%
73:歩いた時間	17	9.5%
74:4 時間	8	4.5%
75:比例定数・a=4	12	6.7%
80:誤答	17	9.5%
90:無答	22	12.3%
計	179	100%

①単位　反応	人数(人)	割合
01:km/時	24	13.4%
02:時速 4km	3	1.7%
11:時速	5	2.8%
21:m/h	1	0.6%
31:h/km・時/km	4	2.2%
41:分速	2	1.1%
50:km	81	45.3%
51:時間・4x 時間	29	16.2%
80:誤答	11	6.1%
90:無答	19	10.6%
計	179	100.0%

●考察

[数量]

・正答を示した生徒が 32%いた。(01～03)

・「1 時間で歩くときの道のり」と速さや時速のような 1 時間ごとに進む道のりと考えられていない生徒が 13%いた。(03,11,12,21)

・「歩いた時間」や「4 時間」と時間とみなす生徒が 15%いた。(52,73,74)

[単位]

・km/時と正答を示した生徒は 15%程度いた。(01,02)

・速さの単位を「km」や「時間」としている生徒が半数程度いた。(50,51)

[数量と単位のクロス集計]

・数量で「時速」など速さと正答を示した生徒でも，単位を km と間違える生徒が 13%いた。速さを，毎時○km や時速○km と表していることが多く，速さの単位を km と捉えている可能性がある。

・数量で「時速」など速さと正答を示した生徒でないと，速さの単位を答えられる生徒はほとんどいない。

①数と単位のクロス集計

数＼単位	01	02	11	21	31	41	50	51	80	90	計
01	10.6%	1.1%	0.6%	0.6%	1.7%	0.6%	13.4%			0.6%	29.2%
02			0.6%								0.6%
03	1.1%		0.6%				0.6%				2.2%
11							8.9%				8.9%
12	0.6%										0.6%
21							0.6%				0.6%
51							1.7%	0.6%			2.3%
52							0.6%				0.6%
61～63							5.1%		0.6%		5.7%
71～75	1.1%	0.6%	1.1%		0.6%		9.0%	12.9%	2.2%	0.6%	28.1%
80						0.6%	3.4%	1.7%	3.4%	0.6%	9.7%
90							2.2%	1.1%		8.9%	12.2%
計	13.4%	1.7%	2.9%	0.6%	2.3%	1.2%	45.5%	16.3%	6.2%	10.7%	100.7%

②について

②　反応	人数(人)	割合
01:時速 3km・3km/時	107	59.8%
31:3(km)	25	14.0%
51:y=3x	21	11.7%
52:1 分で 3km 進む	1	0.6%
53:3m	2	1.1%
80:誤答	17	9.5%
90:無答	6	3.4%
計	179	100.0%

●考察

・表のよみ取りは式のよみ取りより，正答率が高い。

・表から，$y \div x$（比例定数）が何を表しているのかを問うような問題だった場合は，①の問題と比べて正答率が変わるのか調査する必要がある。

●全体のまとめ

・表のよみ取りは慣れている部分もあるが，式のよみ取りについては課題が多い。
そういう場面の設定を多く取る必要がある。

2 ①②のクロス集計

① ＼ ②	01	31	51	52	53	80	90	計
01	22.3%	1.1%	3.4%	0.0%	0.6%	1.7%		29.1%
02	0.6%							0.6%
03	2.2%							2.2%
11	8.4%		0.6%					8.9%
12	0.6%							0.6%
21	0.6%							0.6%
51	1.7%	0.6%						2.2%
52						0.6%		0.6%
61～63	2.3%	1.7%	0.6%			1.2%		5.7%
71～75	15.1%	4.5%	3.9%			3.9%	0.6%	28.0%
80	3.9%	3.4%	1.7%				0.6%	9.5%
90	2.2%	2.8%	1.7%	0.6%	0.6%	2.2%	2.2%	12.3%
計	59.8%	14.0%	11.7%	0.6%	1.1%	9.5%	3.4%	100.0%

●①②のクロス集計の考察

・式からも表からも速さをよみ取れた生徒は 25%いる。(01,02,03 ── 01)

・式から速さをよみ取れた生徒の 7 割近くは，表からも速さをよみ取れている。
逆に，表から速さをよみ取れた生徒のうち，式から速さをよみ取れている生徒は 3.7 割にとどまる。

・以上のことから，式から速さをよみ取ることのほうが生徒にとっては困難であり，表から式を求める際に，関数 $y = ax$ の a の意味を十分に理解させる必要がある。

【調査問題3】

①②について

① 反応	人数(人)	割合
11:分速 4.5km	20	11.2%
13:y=4.5x	0	0.0%
14:4.5(単位違い)	10	5.6%
21:分速 5km	9	5.0%
22:5km	0	0.0%
23:y=5x	2	1.1%
24:5(単位違い)	4	2.2%
31:分速 4km	52	29.1%
32:4km	3	1.7%
33:y=4x	6	3.4%
34:4(単位違い)	19	10.6%
41:分速 14/3 km	4	2.2%
80:意味不明	31	17.3%
90:無答	19	10.6%
計	179	100.0%

② 反応	人数(人)	割合
11:分速-6km	8	4.5%
13:y=-6x	3	1.7%
14:-6(単位違い)	7	3.9%
21:分速 6km	51	28.5%
22:6km	1	0.6%
23:y=6x	1	0.6%
24:6(単位違い)	11	6.1%
31:分速-5km	6	3.4%
32:-5km	1	0.6%
33:y=-5x	3	1.7%
34:-5(単位違い)	5	2.8%
41:分速 5km	18	10.1%
42:5km	1	0.6%
43:y=5x	2	1.1%
44:5(単位違い)	11	6.1%
80:意味不明	29	16.2%
90:無答	21	11.7%
計	179	100.0%

①②のクロス集計（単位：%）

①＼②	11	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34	41	42	43	44	80	90	計
11	3.4			6.7								0.6				0.6		11.2
14			2.2				2.2								0.6	0.6		5.6
21				3.9				0.6									0.6	5.0
23		0.6								0.6								1.1
24							1.1				0.6					0.6		2.2
31	1.1			15.6				2.8				8.9				0.6		29.1
32					0.6				0.6				0.6					1.7
33		1.1								1.1				1.1				3.4
34			1.1				2.2				2.2				5.0			10.6
41				1.7								0.6						2.2
80			0.6	0.6		0.6	0.6								0.6	14.0	0.6	17.3
90																	10.6	10.6
計	4.5	1.7	3.9	28.5	0.6	0.6	6.1	3.4	0.6	1.7	2.8	10.1	0.6	1.1	6.1	16.2	11.7	100.0

●出題のねらい

この問題は，同一平面上に反対の方向を進む 2 台の車のようすを示したグラフのよみの問題であり，直線が右上がりと右下がりとで生徒の理解に違いがあるのかを把握するために出題した。

●①の考察

・①の右上がりの直線では，分速 4km が 29%，分速 4.5km が 11%，分速 5km が 5%，分速 14/3km が 2%であった．格子点のよみ違えを考慮して，これらすべて正答とみなすと正答率は 47%であった．単位違いをした生徒は 18%，その他，誤答は 25%いた．無答は 10%であった．

・80(意味不明)，90(無答)に該当する生徒以外は，69.0%で，比例定数が正のグラフから速さをよみ取ることは概ねできていると考えられる。しかし，y を x の式で表した生徒(13，23，33 に該当する生徒)が 4.5%で，この該当生徒の③の答案をみてみると，きちんと速さをよみ取ることができていない生徒も多く，単に x と y の数値をよみ取り，式化できただけで，この具体的な事象における速さとして捉えられていない生徒が多いと考える。

●②の考察

・②の右下がりの直線では，分速を正の数で答えた生徒は 39%，負の数で答えた生徒は 8%であった．正の数での単位違いは 12%，負の数での単位違いは 7%，その他，誤答は 22%，無答は 12%であった。

・この②でも，よみ取りにくかったことを考慮すれば，おおむね速さをよみ取ることができた生徒（11，21，31，41 に該当する生徒）は 46.5%で，①より若干 1%少ないものの，①と②で正答率に差がない。

・－をつけて表した生徒（11～14，31～34 に該当する生徒）は，18.6%であった。

・一方，－をつけずに表した生徒(21 の生徒)が 28.5%で，単位違いなどの生徒(21～24 の生徒)を含めれば 35.8%である。この該当生徒の③の答案をみると「逆向き，南を＋北を－」などという記述が多く，向きが逆であることをよみ取っている。速さは正の数で答えるという考えが強いために，逆向きに動くときの速さの符号を－と考える生徒が少なかったのではないだろうか。

・一方，「分速－6 ㎞」と正解しているものの，③の記述では「分速－6 ㎞で南へ，分速 4 ㎞で北へ」と間違って捉えている生徒もいる。②で－をつけて表した生徒の中には「傾きが負だから」という考えで答えた生徒や$x = 1$ の値を読んで－とした生徒も多いのではないだろうか。

・80(意味不明)，90(無答)に該当する生徒以外は，72.1%で，比例定数が負のグラフから速さをよみ取れていると考えられ，①と全く差がない。しかし，y を x の式で表した生徒(13，23，33 に該当する生徒)が 4.0%で，この該当生徒は①と同様，形式的にx と y の数値をよみ取り，式化できただけで，この具体的な事象の速さとして捉えられていない生徒もいると考えられる。

③について

(1)原点	人数(人)	割合(%)
00:無反応	121	67.6
11:すれ違う	7	3.9
12:幾何的な特徴	45	25.1
13:原点で同時	6	3.4
計	179	100.0

(3)方向	人数(人)	割合(%)
00:無反応	119	66.5
11:進む方向が違う	49	27.4
12:北＋南－を示す	11	6.1
計	179	100.0

(2)速さ	人数(人)	割合(%)
00:無反応	84	46.9
11:Bの方が速い	68	38.0
12:速さ一定	4	2.2
13:1当たり量等を示す	13	7.3
14:速さが違う	4	2.2
51:A の方が速い	6	3.4
計	179	100.0

(4)比例	人数(人)	割合(%)
0:無反応	115	64.2
1:比例(関数含)	63	35.2
5:比例ではない	1	0.6
計	179	100.0

(5)幾何的	人数(人)	割合(%)
0:無反応	149	83.2
1:幾何的特徴を述べる	30	16.8
計	179	100.0

(6)発着場	人数(人)	割合(%)
0:無反応	172	96.1
1:出発・到着場所異	6	3.4
2:出発・到着時間異	1	0.6
計	179	100.0

●③の考察

③は，グラフを見て気づいたことをあげさせる問題である．生徒の回答は 6 つの視点で分類し，(1)原点に着目したもの，(2)速さに着目したもの，(3)方向に着目したもの，(4)比例関係に着目したもの，(5)幾何的特徴を述べたもの，(6)出発，到着に着目したもの，である．

「(1)原点」について

表現が曖昧で幾何的な特徴を述べているか判断がつきにくい回答もあった．すれ違うと答えた生徒が 4%いた．幾何的な特徴を述べた生徒が 25%，その他 3%いた．

「(2)速さ」について

車 A，車 B それぞれの速さを述べ，その後に「車 B の方が速い」と回答した生徒は 38%，速さが違うと答えた生徒は 2%，「車 A の方が速い」と間違った判断をした生徒は 3%いた．1 あたり量に着目したり，速さが一定であると答えた生徒は 10%いた．

「(3)方向」について

進む方向に関する反応は実施校により異なっていたが，方向が違うと答えた生徒は 27%，速さや位置は分からないが「北を＋，南を－」と考えた生徒は 6%いた．

「(4)比例」について

「比例」の言葉を使って表現をした生徒は 35%いた．

「(5)幾何的」について

直線や傾き具合について述べている生徒が 17%いた．

なお，無答は 15%であった．回答したが，誤った記述をした生徒が 3%であった．全体として指導後には(1)～(4)，(6)に関する視点が豊かに，多数になることが望まれる．

【調査問題4】

①②について

① 反応	人数(人)	割合
01:時速 4km	105	58.7%
41:時速の誤答	13	7.3%
51:距離の誤答	20	11.2%
61:時間の誤答	10	5.6%
71:数値のみ	3	1.7%
90:無答	28	15.6%
計	179	100.0%

② 反応	人数(人)	割合
01:時速 9km	53	29.6%
21:時速 4km	18	10.1%
41:時速の誤答	35	19.6%
51:距離の誤答	18	10.1%
61:時間の誤答	7	3.9%
71:数値のみ	3	1.7%
90:無答	45	25.1%
計	179	100.0%

●①の考察

・グラフから，4.5 時間で 18km 進むと考えて，時速 4km と答えた生徒は 59%いた。(01)

・4km など，道のりとして答えている生徒がいた。(51)

●②の考察

・グラフから，2 時間で 18km 進むと考えて，時速 9km と答えた生徒は 30%いた。(01)

・グラフをよまずに，行きと帰りで同じ速さと考えた生徒は 10%いた。(21)

・6.5 時間で 18km 進んだと勘違いした生徒もいた。(41)

①②のクロス集計

① \ ②	01	21	41	51	61	71	90	計
01	29.1%	9.5%	13.4%				6.7%	58.7%
41	0.6%	0.6%	5.6%				0.6%	7.3%
51				9.5%			1.7%	11.2%
61			0.6%		3.9%		1.1%	5.6%
71						1.7%		1.7%
90				0.6%			15.1%	15.6%
計	29.6%	10.1%	19.6%	10.1%	3.9%	1.7%	25.1%	100.0%

●①②クロス集計の考察

・グラフから①②ともに，移動距離と移動時間に着目して考えた生徒が全体の 29.1%であった。

・①を正答した生徒のうち半分は，②も正答であった。また，②が正答だった生徒のほとんどは①も正答している。

・静水時の船の速さを考えようとした生徒もいた。

③について

③判断　反応	人数(人)	割合(%)
0:同じ	25	14.0%
1:違う	108	60.3%
9:無答	46	25.7%
計	179	100.0%

③理由　反応	人数(人)	割合(%)
10:速さを考えた	20	11.2%
20:1 時間で進む道のりを考えた	9	5.0%
30:グラフの傾き具合を考えた	6	3.4%
40:時間が違うと考えた	20	11.2%
44:道のりは同じだが，時間が違うと考えた	6	3.4%
45:川の流れは一定で，道のりが同じだが，時間が違うと考えた	1	0.6%
47:川の流れは一定だが，時間が違うと考えた	1	0.6%
50:川の流れを考えている	18	10.1%
60:速さを考えたが計算が誤り	7	3.9%
70:川の流れが一定であると考えた	4	2.2%
79:川の流れが一定で，道のりが同じと考えた	3	1.7%
80:時間と道のりが同じと考えた	3	1.7%
85:川の流れを考え，時間と道のりが同じと考えた	1	0.6%
90:道のりが同じと考えた	16	8.9%
91:道のりが異なると考えた	1	0.6%
99:その他	12	6.7%
00:無答(「なんとなく」も含む)	51	28.5%
計	179	100.0%

③クロス集計

	00	10	20	30	40	44	45	47	50	60	70	79	80	85	90	91	99	計
同じ	14.0																	14.0
違う	9.5	11.2	5.0	3.4	11.2	3.4	0.6	0.6	8.9	2.2	0.6					0.6	3.4	60.3
無答	5.0								1.1	1.7	1.7	1.7	1.7	0.6	8.9		3.4	25.7
計	28.5	11.2	5.0	3.4	11.2	3.4	0.6	0.6	10.1	3.9	2.2	1.7	1.7	0.6	8.9	0.6	6.7	100

●③の考察

・速さが同じと答えた生徒は全員，理由を述べられなかった。

・速さが違うと答えた生徒は，理由は多岐にわたり述べていた。

・静水時ではなく，流水時の船の速さという視点では，正解は 10～47 までと考える。
　よって，この問題の正答率は 35%である。(10～47)

●右上がりのグラフについて

3①と4①のクロス集計（四捨五入の関係で、合計が 100%になっていない）

4① / 3①	11:時速 4km	41:時速の誤答	51:距離の誤答	61:時間の誤答	71:数値の誤答	90:無答	計
11:分速 4.5km	10.6%		0.6%				11.2%
14:4.5(単位違い)	3.9%		1.1%			0.6%	5.6%
21:分速 5km	3.4%	0.6%	0.6%			0.6%	5.0%
23、24	1.2%	0.6%			0.6%	1.1%	3.5%
31:分速 4km	22.9%	1.7%	1.1%	1.1%		2.2%	29.1%
32、33、34	9.5%	1.1%	2.3%	2.3%		0.6%	15.7%
41:分速 14/3km	2.2%						2.2%
80:意味不明	3.9%	2.8%	3.9%	1.1%	0.6%	5.0%	17.3%
90:無答	1.1%	0.6%	1.7%	1.1%	0.6%	5.6%	10.6%
計	58.7%	7.3%	11.2%	5.6%	1.7%	15.7%	100.2%

○考察

・3①で正答した生徒（11,21,31,41）のほとんどは4①も正解（11）している。

3②と4②のクロス集計（四捨五入の関係で、合計が 100%になっていない）

4② / 3②	11:時速 9km	21:時速 4km	41:時速の誤答	51:距離の誤答	61:時間の誤答	71:数値の誤答	90:無答	計
11:分速-6km	2.2%	1.1%					1.1%	4.4%
13、14	1.7%	0.6%	1.1%	0.6%	0.6%		1.2%	5.8%
21:分速 6km	12.8%	3.4%	7.8%				4.5%	28.5%
22、23、24	2.8%		1.7%	1.1%		0.6%	1.1%	7.3%
31:分速-5km	1.1%	1.1%		0.6%	0.6%			3.4%
32、33、34	1.1%	1.1%		1.1%	0.6%		1.1%	5.0%
41:分速 5km	5.0%	0.6%	1.7%	0.6%	0.6%		1.7%	10.2%
42、43、44	2.8%	1.1%	1.7%		1.1%		1.1%	7.8%
80:意味不明		1.1%	5.0%	3.9%		0.6%	5.6%	16.2%
90:無答			0.6%	2.2%	0.6%	0.6%	7.8%	11.8%
計	29.5%	10.1%	19.6%	10.1%	4.1%	1.8%	25.2%	100.4%

○考察

・3②で正答した生徒（11,21,31,41）のうち，半数以下しか4②でも正答（11）していない。4②は，比例のグラフでないこと、方眼がかかれていないこと、数値設定が小数であることで、増加量がよみ取れないことが主な原因であると考える。

(2)　指導への提言

生徒の実態調査から、本委員会としては次のことがいえる。

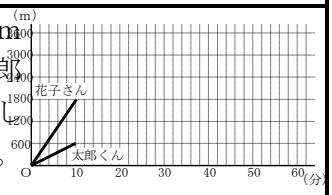
・正負の数の単元で学習する，反対の向きをもつ量の意味については，概ね理解している．しかし，負の速さについては十分な定義がなされぬまま，指導が進められている。

・式と表から，比例定数が速さであるという認識は十分ではない。また，関数 $y = ax$ の表やグラフをかく学習は形式的なものにとどまり，速さとの関連づけが図られていない．

・グラフから比例定数やその符号の意味を捉えることについては，関数として捉えるのではなく，幾何的に捉える傾向が強い．日常事象に踏み込んだ考察と表現までには至っていない．

このことから，関数の利用の指導の前に，向きをもつ速さについて指導し、その上で，関数の利用の指導を行い，関数における速さの理解を深めることを提言する．

(3) 中１関数指導計画[4)]

時数	項　目	学　　習　　内　　容
1	ともなって変わる量	［課題］封筒から画用紙を引き出していくと何が変わりますか。 ① 変化する量・変化しない量をあげる。 （ｉ）引き出した長さと周囲の長さとの関係を調べる。 （ⅱ）引き出した長さとＡの部分の面積との関係を調べる。
2		（ⅲ）引き出した長さと全体の面積との関係を調べる。 （ⅳ）引き出した長さとＢの部分の面積との関係を調べる。 ② 「y は x の関数である」ことを定義する。 ③ 「変域」を定義する。
3	関数 $y=ax$	［課題場面］円柱状の空の水槽に毎分２㎝ずつ水面の高さが増すように水を入れていきます. ① １分後，２分後，３分後，・・・の水面の高さを調べ，表にまとめる。 ② １分前，２分前，３分前，・・・の水面の高さを調べる。 ③ x 分後の水面の高さを y ㎝として，y を x の式で表す。 ④ 「y は x に比例する」ことを定義する。
4		［課題場面］円柱状の水の入った水槽から，水面の高さが毎分２㎝ずつ減るように水をぬいていきます。 ① 第３時と同じように，表をかいて調べる。 ② y は x に比例することを確認する。
5	関数 $y=ax$ のグラフ (座標とグラフ)	［課題場面1］水槽に，１分間に２㎝ずつの割合で水を入れていく。 ① 具体的な場面をもとに表をかく。 ② 与えられたグラフの意味を確認する。 ③ 負へ拡張し，グラフを想像する。 ④ 点の位置を，座標を用いて表現する。与えられた座標をもつ点をとる。 ⑤「座標軸, 原点, x 軸, y 軸, x 座標, y 座標」の用語を与える。 ［課題場面2］水槽から，１分間に２㎝ずつの割合で水をぬいていきます。 ⑥ ①～④と同様な活動を行う。
6		**関数 $y=ax$ の a の意味とグラフ（向きをもつ速さ）（本冊子 p.16参照）**
7	練習問題	
8	式の決定	（具体的な場面から立式の観点を生徒自ら見いだし，比例の式の決定の学習を行う）
9	反比例とそのグラフ	［課題］面積が６cm^2である長方形について，縦と横の長さの関係について調べる。 ①　表や式から反比例を定義する。
10		① $y=\frac{6}{x}$ などのグラフをかく。② $y=\frac{a}{x}$ のグラフが双曲線になることを知る。
11	式の決定	（具体的な場面から立式の観点を生徒自ら見いだし，反比例の式の決定の学習を行う）
12	関数の利用	（動点に関する問題）
13		［課題場面］花子さんと太郎君は，Ａ駅から３６００m離れたＢ公園に行きました。花子さんは自転車で，太郎君は歩きました。下のグラフは，２人がＡ駅から出発してから途中までの２人の動くようすを表したものです。  ① グラフを使って問題を解決する。 ② Ａ駅から3600m離れたＢ公園までの道のりを動くようすをグラフに表し，問題をつくる。　　など
14		**（向きをもつ速さに関する問題）（本冊子 p.17参照）**
15	問題練習	

(4)第６時学習指導案[2)]

◎本時のねらい

・具体的事象を通して，表や式から関数 $y = ax$ のグラフをかく。

・関数 $y = ax$ の a の意味を，表やグラフから理解する。

・向きをもつ速さを，関数 $y = ax$ の a の意味やグラフなどから理解する。

◎本時の展開

学習活動と主な発問
課題場面 南北に通じる道路上を，太郎さんと花子さんは歩いています。ある時刻の地点を基準のＯとします。それぞれは同時に地点Ｏを通過しました。 課題１ 太郎さんは時速３㎞で北の方向に進んでいます。太郎さんが，地点Ｏを通過してから x 時間後にＯから北へ y ㎞の地点を通過したとして，x と y の関係を調べましょう。 (1) 表や式で表して，調べましょう。 (2) 表の x の値－2 はどういう意味ですか。また，y の値－6 はどういう意味ですか。 (3) x と y の関係をグラフに表そう。 (4) 太郎さんは，ある時刻より 1.5 時間後はどこにいますか。 また，2.5 時間前はどこにいましたか。 課題２ 花子さんは時速３㎞で南の方向に進んでいます。花子さんが，地点Ｏを通過してから x 時間後にＯから北へ y ㎞の地点を通過したとして，(3)の座標平面上に x と y の関係を表すグラフを工夫してかきましょう。 (5) 工夫してグラフをかきましょう。 (6) どのようにグラフをかいたか，説明しましょう。 (7) ある時刻より 3.5 時間前の２人の位置を，グラフを使って説明しましょう。 課題３ 次郎さんも同じ南北に通じる道路上を歩いています。次郎さんの歩いているようすを課題２(5)と同じ座標平面上にグラフで表し，式を求めると，$y = -2x$ となりました。 太郎さん，花子さん，次郎さんの３人が歩いているようすについて考えましょう。 (8) 次郎さんの歩いているようすを説明しましょう。 (9) ３人の歩いているようすを考えましょう。 課題３の問題を通して，向きをもつ速さ，グラフ，$y = ax$ の a の意味をまとめる。

(5)第 14 時学習指導案[2)]

◎本時のねらい

・座標平面上の第Ⅰ～Ⅳ象限に現れる関数 $y = ax$ のグラフの意味を，具体的な場面で見いだすことができる。

・関数 $y = ax$ で $a > 0$ の場合， $a < 0$ の場合の a の意味を，具体的な場面で見いだし，利用することができる。

・表，グラフ，式を用いて，問題を解決することができる。

◎本時の展開

学習活動と主な発問
課題場面 兄は家から駅までの間にコンビニがある道路上を歩きます。ある時刻のコンビニの地点を基準の O とします。 課題１ 兄はいつも家からコンビニを通り駅に行きます。下のグラフは，コンビニを通過してから x 分後に駅へ y m の地点を通過したとして，その進行のようすを表したものです。 (1) 兄が進む速さを求めなさい。また，家から駅までの道のりを求めなさい。 (2) (1)の理由を説明しましょう。 課題２ 兄の行動を知っている弟は，駅を出発して家へ向かう計画を立てました。それは，コンビニで兄とすれ違って，一定の速さ分速 50m で進む計画です。弟の計画を課題１の座標平面上に工夫してグラフで表しましょう。 (3) 弟の計画をグラフに表しましょう。 (4) 弟の計画を表したグラフを，y を x の式で表そう。 課題３ 弟は計画を実行しました。兄とコンビニですれ違ったときに，兄から「お母さんは今から 10 分後に家を出かけるので，あなたに鍵を預けたいから急いで家に帰ってほしい」と言われました。弟はどのように計画を変更すればよいですか。 (5) 弟が計画を変更したようすをグラフで表してみよう。 (6) (5) の $y = ax$ の a の値について，気づいたことを発表しましょう。 (7) グラフ上で兄と弟の進むようすが同時によみとれることを確認する。

５　まとめと今後の課題

「向きをもつ速さ」をグラフの指導において扱うことで，関数の利用でも「向きをもつ速さ」の理解の定着が進んだ.

今後は，次の①～⑤を課題として，研究を進めていく.

① これまでの研究をもとに，中１の指導計画をよりよいものに改善する.

② ポストテストを実施し，指導後の生徒の変容を検証する.

③ 中２においても「向きをもつ速さ」についてこれまでも研究を行ってきたが，中１の研究をもとに，指導案の見直しと指導計画の改善を行う.

④ 小・中・高の算数・数学における速さの指導に関する教材を分析し，系統的な指導のあり方について研究を行う.

⑤ 他教科における速さの指導に関する教材を分析し，数学教育との繋がりを考察する.

［引用・参考文献］

1) 東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
日数教(岐阜)大会発表資料(2016)
「関数における速さの指導～関数 $y=ax$ の a の意味と第Ⅰ象限から全象限への拡張～」

2) 東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
日数教(和歌山)大会発表資料(2017)
「関数における速さの指導～関数指導における負の速さの必然性に迫る指導～」

3) 学校図書(2016)「中学校数学１」，pp. 12-257
大日本図書(2016)「新版数学の世界１」，pp. 9-260
啓林館(2016)「未来へひろがる数学１」，pp. 12-222
教育出版(2016)「中学数学１」，pp. 9-260
日本文教出版(2016)「中学数学１」，pp. 10-246
数研出版(2016)「改訂版中学校数学１」，pp. 12-223
東京書籍(2016)「新編新しい数学１」，pp. 8-226

4) 大西康太・中西正治(2012)
「正負の数の指導に関する実践的考察－一元の立場に立った加法・減法の指導－」，
第４５回数学教育論文発表会論文集（第１巻），日本数学教育学会，pp. 491-496

5) 東京都中学校数学教育研究会研究部関数委員会(2012)
「中学校数学科 関数指導を極める」，明治図書，pp. 136-139

○ 東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会

・日数教(福岡)大会発表資料(2012)
「『変化の割合』の指導について
～第１学年　関数の利用におけるグラフのよみと関数 $y=ax$ の a の意味～」

・日数教(山梨)大会発表資料(2013)
「『変化の割合』の指導について
～第１学年 関数の利用場面における関数 $y=ax$ の a の意味～」

・日数教(鳥取)大会発表資料(2014)
「『変化の割合』の指導について～速さに関する課題を，変域を拡げて考察する～」

・日数教(北海道)大会発表資料(2015)
「速さに関する関数の利用について（第２学年）～変化の割合を視点として～」

・日数教(岐阜)大会発表資料(2016)
「関数における速さの指導～関数 $y=ax$ のa の意味と第Ⅰ象限から全象限への拡張～」

・日数教(和歌山)大会発表資料(2017)
「関数における速さの指導～関数指導における負の速さの必然性に迫る指導～」

東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会

小髙　洋平（豊島区立千川中学校）　橋爪　昭男（渋谷区立渋谷本町学園）
桑原　宏一（葛飾区立堀切中学校）　稗田　浩士（新宿区立新宿西戸山中学校）
菅田　圭一（足立区立第十中学校）　堀　孝浩（東京都立富士高等学校附属中学校）
齋藤　圭祐（墨田区教育委員会）　待山　貴彦（足立区立新田中学校）
関　富美雄（渋谷区立上原中学校）　山本　恵悟（足立区立千寿青葉中学校）
高村　真彦（板橋区立高島第二中学校）　吉田　直樹（元中野区立中野中学校）
高山　琢磨（大田区立志茂田中学校）　吉田　裕行（世田谷区立駒沢中学校）
塚本　桂子（世田谷区立砧中学校）

共同研究者
風間喜美江（統計数理研究所）　半田　進（元東北福祉大学）

http://www.tochusu.com/function.html