

関数における速さの指導

～関数 $y = ax$ の a の意味と第I象限から全象限への拡張～

東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会

1. 研究のねらい	1 ページ
2. 研究の経過	
(1) 速さに関する研究の経緯	1 ページ
(2) 数の拡張と中1関数学習における座標平面の拡張	2 ページ
(3) 関数における「速さ」の指導上の課題	2 ページ
(4) 「速さ」に関する指導方針	2 ページ
3. 中学校数学における「速さ」について－教科書調査からの示唆－	
(1) 小・中の算数・数学における「速さ」に関する学習の繋がり.....	3 ページ
(2) 中1教科書における「正負の数」と「速さ」との繋がり.....	3～5 ページ
(3) 関数学習における「速さ」の定義とその指導.....	5 ページ
4. 第1学年 関数における速さの指導	
(1) 中1関数指導計画	6 ページ
(2) 指導案	7～8 ページ
(3) 授業記録	9～10 ページ
(4) 研究協議	10～11 ページ
(5) 改訂指導案	12～14 ページ
5. 今後の課題	15 ページ
引用・参考文献	15 ページ

1. 研究のねらい

関数と速度の理解については、本委員会の研究で、速度を向きがある速さとして捉えることに課題があることがわかった。そこには、「正負の数を反対の向きの量を統一してみる」と「全象限に拡張されたグラフの意味、表の意味」とのつながりが弱く、正負の数での学習内容が活かされていないと考えた。また、速さの概念と関数は密接な関係があるにも関わらず、その関係が関数指導で意味づけされているとは限らないことがわかった。そこで本年度は、関数における速さの指導について、次のねらいで研究を進める。

- ・ 正負の数と速さの関連について、教科書分析を通して把握する。
- ・ 関数における速さの指導について、指導計画に位置づけ、指導案を作成して研究授業を実施し、その指導の妥当性を探る。

2. 研究の経過

(1) 速さに関する研究の経緯

本委員会における平成24～27年度の研究で、変域の負への拡張や関数 $y = ax$, $y = ax + b$ の a が負の値を含む具体的な場面の課題として、列車のすれ違いと追い越しという場面や、水槽の水位が変化する場面を取り上げ、「関数の利用」や「グラフのよみ」の実践を行った。そこでは、 a が正負の両方の値をとること、それらが反対の向きの量を表していることへの理解に困難性があることがわかった。また、速さに関するグラフのよみの調査では、次の課題が見られた。¹⁾

- ・ 2台の車の走る方向がグラフからよみ取ることができていない。特に、右下がりのグラフのよみ取りに困難性がある。
- ・ 傾きぐあいと速さの関係について、生徒の理解に揺らぎがある。

水槽の水位は、変化が目に見えることもあり、グラフとの関連づけがしやすいが、向きがある速さは、関数指導で意味づけされていないこともあり、理解に困難性がある。このことから、速さに関する課題を通して関数 $y = ax$ のグラフの指導を行うとともに、 a の意味の理解を深め、グラフのよみの理解に繋げていくことが必要であるという考えに至った。

(2) 数の拡張と中1関数学習における座標平面の拡張

中1の関数学習に至るまでは、次の流れをとる。

正負の数 → 文字と式 → 1次方程式 → 関数

正負の数の単元では、数の範囲を負の数にまで拡張することにより、

- (a) 反対の方向や性質をもった数量を、基準を定めて+や-を用いた数で表すこと
- (b) 反対の向きの量を統一してみる
- (c) 四則がいつでもできるようになること

ができるようになる。これらを踏まえ、中1の比例を含む関数の学習が行われる。

小学校の比例の学習と違う点としては、

- (ア) 変数の変域を負の数も含めて拡張して比例をとらえる
- (イ) グラフは座標平面上の第I象限から全象限に拡張して考える
- (ウ) 比例定数 a の範囲も負の数まで広げてその意味をとらえる

の3つが挙げられるが、現状では(a)～(c)の関連を意識せずに指導が行われていることが多い。また、(ア)～(ウ)の学習の後に、問題解決における変化の割合の見方や考え方の利用の学習に繋げていくが、多くの指導は、 x の変域が第I象限に限られ、 $y = ax$ で $a > 0$ の場面で課題を設定しており、小学校と同じ内容に留まっているのが現状である。つまり、座標平面や変数 x 、 y 、比例定数 a を負の数まで広げているにもかかわらず、利用や活用の場面では既習事項が活かされていない。例えば、次のようなことがあげられる。

- ・具体的な場面から関数 $y = ax$ の式を導き、比例の定義をしているにも関わらず、変数 x が負の数になる場合について考えさせていない。また、表は、変数 x が正の数または0の場合のときのみを扱う。
- ・比例定数 a が負の数になる場面を考えさせていない。
- ・座標平面を第I象限から全象限へ拡張させたあとは、点の集合としての $y = ax$ のグラフ(直線)を確認し、幾何的な見方で $a > 0$ と $a < 0$ のグラフをかかせる程度にとどまっている。

このように、関数学習において、変域の拡張や座標平面の拡張などが行われていても、具体的な場面での問題解決に活かされていないことがわかった。

(3) 関数における「速さ」の指導上の課題

本研究の関数における速さに関する学習については、次の3点を研究の重点として行ってきた。

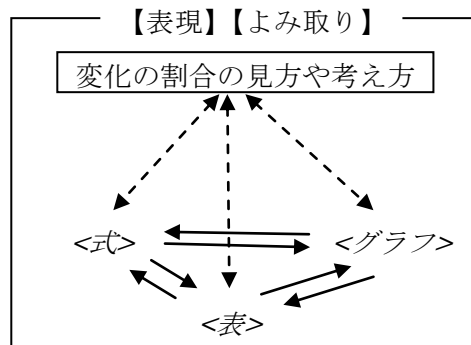
- ・速さの意味を変化の割合を通して理解し、グラフのよみで、速さの概念を捉え直そうとすること
- ・関数 $y = ax + b$ の a の値が変化の割合を表すとともに、向きを持った速さ(速度)として正負の両方の値を取ること、それらが反対の向きの量を表すということをも理解すること
- ・関数 $y = ax + b$ の b の値が基準の時間における位置を表すことを理解すること

しかし、「正負の数」と「速さ」の関連づけが図られていないことから、指導において次の課題を見いだした。

- ・グラフをかく指導の基礎的な部分で、正負の数とのつながりをつけることが課題である。
- ・正負の数では東西の移動のみで、1次元での扱いであるが、関数では2次元での扱いとなることに理解の困難性が見られる。また、 $y = ax$ はグラフ上では形状が変わり、 a の符号が、反対の向きの量を表すが、グラフと実際との関連づけが意識しづらい。

(4) 「速さ」に関する指導方針

これまで、本委員会では、全学年を通して、右の図のような表・グラフ・式を一体化した指導が必要であり、その指導を通して、【表現】【よみ取り】に「変化の割合」の見方や考え方を考察の道具として利用していくことが重要であることを述べてきた。速さに関する関数学習においても、速さと変化の割合を関連させ、その考察を通して学習を深めることを重点としてきた。「向きがある速さ」は、変化の割合そのものである。つまり、速さに関する学習場面でも右の図の関係を意識した展開の指導方針をとる。



3. 中学校数学における「速さ」について－教科書調査からの示唆－

物体の運動の遅速と運動の方向を合わせ考えたものを速度といい、方向を考えない速度の大きさのことを速さということがある。²⁾ この意味における「速さ」は、方向は考えないものであるが、本委員会では、「速さ」という言葉を使いながら、「速さ」と「正負の数」との繋がりをもたせ、「速さ」について、方向までも学習の対象として考察していくことにする。

本研究のねらいから、中学校関数指導において、その繋がりを重視し、それらを学習内容として位置づけ指導を図る研究を行う。そこで、ここでは次の3点について考察を行う。

- (1) 小・中の算数・数学における「速さ」に関する学習の繋がり
- (2) 中1教科書における「正負の数」と「速さ」との繋がり
- (3) 関数学習における「速さ」の定義とその指導

(1) 小・中の算数・数学における「速さ」に関する学習の繋がり

速さに関する学習は、小・中学校の算数・数学について概観すると次の流れとなる。

①小5：単位量当たりの大きさと意味についての指導

- ア. 同種の2量の割合で表す値
- イ. 異種の2量の割合で表す値

(例) ひなさんの家の 60m^2 の畑からは 315g 、はるさんの家の 90m^2 の畑からは 468g の大根が穫れました。どちらの畑の方が取れ高がよいといえるのでしょうか。

②小6：小5の異種の2量の割合の学習を受けて、速さが「時間」と「道のり」の2つの量に関係していること、どちらが速いかを比べるにはどのようにすればよいかを考えること、について学習する。そして、単位量当たりに進む道のりを速さとし、速さの定義を知る。

③中1：「正負の数」では、時速 Okm で東の方向に進み、1時間後、2時間後の位置などを問う。

「文字と式」では、(速さ) \times (時間)の言葉の式を利用して文字を使い、道のりや速さを文字式で表す。

「1次方程式」では、1次方程式を使い、速さに関する問題を扱う。

④中2：「連立方程式」では、連立方程式を使い、速さに関する問題を扱う。

「1次関数」では、直線の式の意味を、直線の傾きや速さの視点で捉える。

⑤中3：「関数 $y = ax^2$ 」では、ボールが落ち始めてからの時間と落ちる距離などについて、その変化の割合を調べ、平均の速さの考えを学習する。

学習の流れを概観すると上記のようになるが、現行の教科書では、正負の数や1次関数などにおいて、突然「マイナスの速さ」という表現を見かける。例えば「時速 -5km 」である。速さの定義は小学校で行われているが、それは道のりも時間も正の数の範囲である。中学校数学で扱われる数の範囲が拡張されたとき、速さの定義も新たに必要があろう。

(2) 中1教科書における「正負の数」と「速さ」との繋がり

① 「正負の数」に関する先行研究からの示唆

本研究に関わる先行研究として、大西康太・中西正治の研究³⁾があげられる。

大西らは教科書には正負の数の見方が3通りあることを指摘している。

- i 一元的 (例)500円の収入を $+500$ 円と表すとき、400円の支出は -400 円
・・・2つの相反する要素(二元)に対して正負の数を用いる場合
- ii 二元的Ⅰ (例)基準,得点10点に対して、どれだけ多いか少ないか。7得点は -3 得点。
- iii 二元的Ⅱ (例)「3個少ない」ことを -3 を使い「 -3 個多い」と表す。
多い,少ないの一方の言葉「多い」を使い状態を表す。

そして、大西らは次の内容関連とともに学習の混乱が困難性を生じさせていることも指摘している。

- ・中2の変化の割合で、一方の言葉「増加量」と正負の数 $+$ 、 $-$ を使用し、一方の言葉「 y の増加量 -3 」など増減を表現し、1つの言葉で表現
- ・一方では二元の意味で符号を説明し正負の数を定義しながら、一方では一元の意味で負の数の利用を行っている。

② 中1「正負の数」と「速さ」に関する教科書調査⁴⁾

①の先行研究を受け、①のi～iiiを視点として教科書7社の「正負の数」をもとに中1の関連内容を調査した。

教科書 主な項目	内 容 例	A社	B社	C社	D社	E社	F社	G社
導入	基準0やAを使い表す・読む	ii	ii	ii	ii	ii	ii	ii
	400円の利益を+400円と表すとき、500円の損失は-500円と表す	i	i	i	i	i	i	i
	ある時刻から-3時間後の時刻を3時間前の時刻と表す		iii	iii			iii	
数の大小				iii				
加法	$(-5) + (-3)$ 0から負の向きへ5動き、さらに負の向きへ3動く	ii	ii		ii	ii	ii	ii
	ある位置-5から、-3大きい数へ動く			iii				
減法	(逆演算, 加法の結果を使い言葉で説明)	iii	iii	iii	iii	iii	iii	iii
加減混合								
乗法	西に向かって分速70mを分速-70mと表す	i			i			
	西に向かって分速70mを東へ分速-70mと表す					iii	iii	
	現在…0, 1分前…-1分, 1分後…+1分	ii	ii		ii	ii	ii	ii
除法								
四則								
利用	仮の平均の考えを使う	ii	ii	ii	ii	ii	ii	ii
	+-の読み取り・利用		ii					
※文字・ 方程式	年齢算		iii					
	速さの問題あるが正負利用							
	過不足の問題	ii	ii	ii	ii	ii	ii	ii
※関数	西へ分速2kmを、東へ分速-2kmと表す		iii					
	基準をもとに水位の大小		ii					
	$(道のり) \div (時間) = (速さ)$	有	有		有	有	有	有
※資料の活用	仮の平均							

※は、正負の数の領域以外であることを示す。

[上記表の注・例]

・数の大小iiiについて

ふつう数の大小の内容は数直線上で、右へいけば数は大きくなり左にいけば数は小さくなることを扱う程度であるが、正負の数の概念を使って考察をしているものもある。

(例)数直線を使い、「5より-8大きい数」について考えさせ、「-8大きいことは8小さい」と理解させて、加法に繋げている。

この例をiiiと解釈するかはいろいろな意見があろう。

・減法iiiについて

(例) $(+2) - (-5)$

$= (+2) + (+5)$ 「-5をひくことは+5を加えることと同じである。」をiiiと解釈した。

・乗法「+、-の時速・分速」iiについて

乗法において、道のり・時間・速さに関して大別すると3つとなる。

ア 速さは小6の指導で展開している。

(例) $(+4) \times (+2)$ について+4は東に向かって歩く速さが毎時4km、+2は現在より2時間後であると解釈し、 $(-4) \times (+2)$ などの意味を見だし計算のまとめをしていく。マイナスの速さは示していない。

イ 初めはアと同様であるが、マイナスの位置や距離を考えた後にマイナスの速さを添えている。

ウ マイナスの速さを定義してから、添え図等にマイナスの位置や距離・時間を示している。

(例) 東に向かって走る自動車を小6の速さ・時間・道のりの関係を使って説明をする。その後、自動車が西へ向かって時速80kmで走ることを、時速-80kmで走るといい表す。

・※文字・方程式 年齢算iii

(例)現在Aさんは13歳、Bさんは43歳。Bさんの年齢がAさんの年齢の4倍であるのはいつかを調べよう。

現在から x 年後に4倍になるとして方程式を立て解くと、 $x = -3$ となる。この解 $x = -3$ に対して、答えは「現在から3年前」と解釈することまで考えさせている。「現在から-3年後は3年前」と解釈する正負の数の理解を方程式の利用でより深めている。

・※文字・方程式 過不足の問題ii

(例)折り紙を何人かに配る。1人に4枚ずつ配ると9枚不足、1人に3枚ずつ配ると15枚余る。

文章上には基準が明記されていないが、生徒自ら基準を設定し、過不足を+で表すことをねらいとするので、iiと解釈した。

(3) 関数学習における「速さ」の定義とその指導

(2)の教科書調査から、向きがある速さについては、生徒に無理のない指導過程を踏み、その定義をすることが重要であることが判明した。現行の教科書では、向きがある速さについて、その背景となる学習や概念を十分に考察されないまま与えている傾向にあるからである。例えば、「西に向かって分速70mを分速-70m」と与えているものがある。正負の数において、時間や位置・道のりなどを表すことについて学習してきたが、速さについては、それとは異なるものがある。小6の定義に従って、ここで簡単にマイナスの速さを定義してしまってもよいのだろうか。

向きがある速さは、正負の数、数の拡張、関数学習の変域の拡張、グラフの第I象限から全象限への拡張などの学習内容を十分踏まえ、生徒の理解の立場に立った指導を考えなければならない。

以上のことから、本委員会では、中学校の符号のついた速さについて、

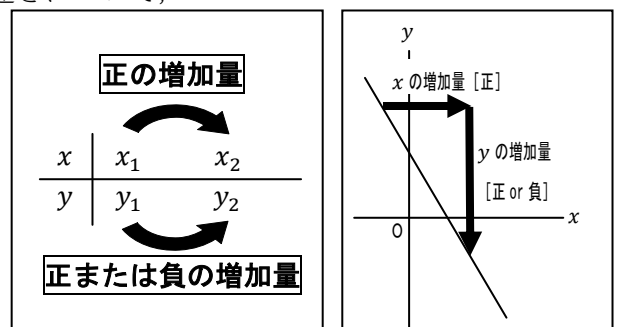
(速さ) = (負の数を使って方向を含めて表した道のり) ÷ (時間)

の意味、マイナスも現れることを理解させ、その後に速さを定義する。

ここでいう速さは、変化の割合、すなわち

$$(y \text{ の増加量}) / (x \text{ の増加量})$$

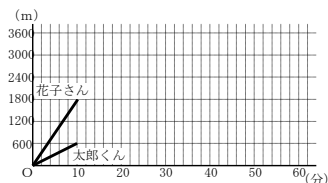
を求めるときの指導のように、 x の増加量は正の増加量として捉え、 y の増加量は正負のどちらかの増加量として捉えさせる。(右図参照)



4. 第1学年 関数における速さの指導

(1) 中1関数指導計画⁵⁾

時数	項目	学習内容
1	ともなって 変わる量	〔課題〕封筒から画用紙を引き出していくと何が変わりますか。 ① 変化する量・変化しない量をあげる。 (i) 引き出した長さと同程度の長さとの関係を調べる。 (ii) 引き出した長さと同程度の面積との関係を調べる。
2		(iii) 引き出した長さと同程度の面積との関係を調べる。 (iv) 引き出した長さと同程度の面積との関係を調べる。 ② 「 y は x の関数である」ことを定義する。 ③ 「変域」を定義する。
3	関数 $y = ax$	〔課題場面〕円柱状の空の水槽に毎分2cmずつ水面の高さが増すように水を入れていきます。 ① 1分後, 2分後, 3分後, …の水面の高さを調べ, 表にまとめる。 ② 1分前, 2分前, 3分前, …の水面の高さを調べる。 ③ x 分後の水面の高さを y cmとして, y を x の式で表す。 ④ 「 y は x に比例する」ことを定義する。
4		〔課題場面〕円柱状の水の入った水槽から, 水面の高さが毎分2cmずつ減るように水をぬいていきます。 ① 第3時と同じように, 表をかいて調べる。 ② y は x に比例することを確認する。
5	関数 $y = ax$ のグラフ (座標とグラフ)	〔課題場面1〕水槽に, 1分間に2cmずつの割合で水を入れていく。 ① 具体的な場面をもとに表をかく。 ② 与えられたグラフの意味を確認する。 ③ 負へ拡張し, グラフを想像する。 ④ 点の位置を, 座標を用いて表現する。与えられた座標をもつ点をとる。 ⑤ 「座標軸, 原点, x 軸, y 軸, x 座標, y 座標」の用語を与える。 〔課題場面2〕水槽に, 1分間に2cmずつの割合で水をぬいていきます。 ⑥ ①~④と同様な活動を行う。
6	関数 $y = ax$ の a の意味とグラフ (向きがある速さ) (本冊子 pp. 7~9 参照)	
7	練習問題	
8	式の決定	(具体的な場面から立式の観点を生徒自ら見だし, 比例の式の決定の学習を行う)
9	反比例とその グラフ	〔課題〕面積が 6cm^2 である長方形について, 縦と横の長さの関係について調べる。 ① 表や式から反比例を定義する。
10		① $y = \frac{6}{x}$ などのグラフをかく。② $y = \frac{a}{x}$ のグラフが双曲線になることを知る。
11	式の決定	(具体的な場面から立式の観点を生徒自ら見だし, 反比例の式の決定の学習を行う)
12	関数の利用	(動点に関する問題)
13		〔課題場面〕花子さんと太郎君は, A駅から3600m離れたB公園に行きました。花子さんは自転車で, 太郎君は歩きました。下のグラフは, 2人がA駅から出発してから途中までの2人の動くようすを表したものです。 ① グラフを使って問題を解決する。 ② A駅から3600m離れたB公園までの道のりを動くようすをグラフに表して, 問題を つくる。 など
14		(2つの電車の動きを表すグラフから, すれ違いや追い越しなどの問題解決を図る。)
15	問題練習	

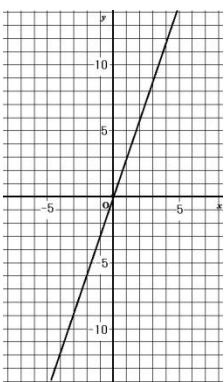
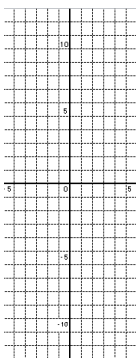


(2) 指導案

◎本時のねらい

- ・ 具体的事象を通して、表や式から関数 $y = ax$ のグラフをかく。
- ・ 関数 $y = ax$ の a の意味を、表やグラフから理解する。
- ・ 向きがある速さを、関数 $y = ax$ の a の意味やグラフなどから理解する。

◎本時の展開

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点																																																		
<p>課題場面 1 を把握する</p>	<p>課題場面 1</p> <p>南北に通じる道路上を、太郎さんは歩いています。太郎さんは時速3kmで北の方向に進み、ある時刻に地点Oを通過しました。</p> <p>(1) 太郎さんは2時間後にはどこにいるでしょうか。 ア 地点Oより北へ6kmの地点</p> <p>(2) 太郎さんは2時間前にはどこにいたのでしょうか。 ア 地点Oより南へ6kmの地点</p> <p>(3) 地点Oを通過してからのx時間後のOから北への地点をy km とします。xとyの関係を表や式で表してみましょう。</p> <p>ア</p> <table border="1" data-bbox="327 996 1053 1086"> <tr> <td>x (時間後)</td> <td>...</td> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>y (km)</td> <td>...</td> <td>-9</td> <td>-6</td> <td>-3</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>...</td> </tr> </table> <p>イ</p> <table border="1" data-bbox="327 1120 1053 1209"> <tr> <td>x (時間後)</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>y (km)</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>12</td> <td>15</td> <td>...</td> </tr> </table> <p>ウ</p> <table border="1" data-bbox="327 1243 1053 1332"> <tr> <td>x (時間後)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>y (km)</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>12</td> <td>15</td> <td>...</td> </tr> </table> <p>エ $y = 3x$</p> <p>(4) 表をもとに、xとyの関係をグラフに表しましょう。</p> <p>ア</p>  <p>(5) 1.5時間後は、太郎さんはどこにいますか。</p> <p>(6) 2.5時間前は、太郎さんはどこにいましたか。</p> <p>(7) 太郎さんが時速3kmで歩いていることは、グラフ上のどの部分をみれば確かめられますか。</p> <p>(8) (4,12)は通っていますが、これは正しいでしょうか。</p>	x (時間後)	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	y (km)	...	-9	-6	-3	0	3	6	9	...	x (時間後)	0	1	2	3	4	5	...	y (km)	0	3	6	9	12	15	...	x (時間後)	1	2	3	4	5	...	y (km)	3	6	9	12	15	...	<p>・ まっすぐな道の写真を見せる。写真に地点Oを入れておく。</p> <p>・ 黒板に縦の直線をかき、太郎さんが歩いている様子を示す。</p> <p>・ Oから北へ6km地点を+6kmとすると、Oから南へ6km地点は-6kmと表すことができることを確認する。</p> <p>・ $y = 3x$の式も、生徒に発表させ、意味も確認する。</p> <p>・ 2時間前は-2時間後であることを確認する。</p> <p>・ xの値が負の数の場合も表にまとめさせる。</p> <p>・ 第IV象限までの座標平面が印刷された紙を生徒に配布する。</p> 
x (時間後)	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...																																											
y (km)	...	-9	-6	-3	0	3	6	9	...																																											
x (時間後)	0	1	2	3	4	5	...																																													
y (km)	0	3	6	9	12	15	...																																													
x (時間後)	1	2	3	4	5	...																																														
y (km)	3	6	9	12	15	...																																														

課題場面2
を把握する

$y = ax$ で
 $a < 0$ の
グラフを
かく

$y = ax$ の
表, グラフ,
式の特徴を
まとめる

まとめ

課題場面2

南北に通じる道路上を、花子さんは歩いています。
花子さんは時速3kmで南の方向に進み、ある時刻に
地点Oを通過しました。

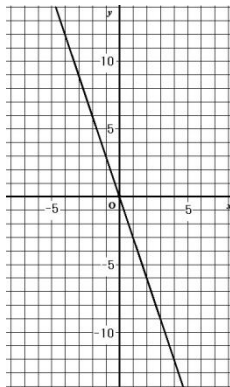
- (9) 花子さんは2時間後にはどこにいるでしょうか。
ア 地点Oより南へ6kmの地点
- (10) 花子さんは2時間前にはどこにいたのでしょうか。
ア 地点Oより北へ6kmの地点
- (11) 地点Oを通過してからの時間を x 時間、Oから北への
距離を y kmとして、 x と y の関係を表や式、グラフで
表してみましょう。

ア

x (時間後)	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y (km)	...	9	6	3	0	-3	-6	-9	...

イ $y = -3x$

ウ



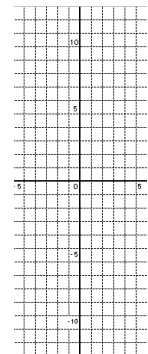
- (13) 1.5時間後は、花子さんはどこにいますか。
(14) 2.5時間前は、花子さんはどこにいましたか。
(15) $(4, -12)$ は通っていますが、これは正しい
でしょうか。
(16) 太郎さんや花子さんの歩いていくようすを、表、グラ
フ、式で調べました。2つを比べてどんなことがわか
りますか。
ア グラフは原点を通る直線である。
イ 太郎くんは3ずつ増え、花子さんは3ずつ減る。
ウ $y \div x$ の値がすべて等しい。
エ 0を中心として y の絶対値が等しい。
オ 太郎くんのグラフは右上がりのグラフである。
カ 花子さんのグラフは右下がりのグラフである。
キ 太郎くんの式の x の係数は正の数、花子さんの式
の x の係数は負の数である。
ク $x = 1$ のときの y の値が a の値になっている。

- ・速さが同じでも、方向が違うと、表、グラフ、式は反転していることを確認する。
- ・北の方向に進む速さを時速+3kmとすると、南の方向に進む速さは時速-3kmとなることを確認し、表、グラフ、式でその概念をつかむ。

・課題場面1で使った縦の直線を利用して、花子さんが歩いている様子を示す。

・Oから北へ6km地点を-6kmとすると、Oから南へ6km地点は+6kmと表すことができることを確認する。

- ・ $y = -3x$ の式も、生徒に発表させ、意味も確認する。
- ・2時間前は-2時間後であることを確認する。
- ・ x の値が負の数の場合も表にまとめさせる。
- ・第IV象限までの座標平面が印刷された紙を生徒に配布する。



- ・何をいってよいか、わからない生徒には「共通点は何ですか」、「違う点は何ですか」を問い、考えさせる。
- ・反応がない場合は「共通点は何ですか」「違う点は何ですか」と問い、考えさせる。
- ・カについて、「左上がり」と答える生徒もいるので、教師が修正する。
- ・クが出ない場合は、教師が言う。
- ・反転という言葉には、様々な意味があるであろう。直感的に表、グラフ、式がイメージできればよい。

(3) 授業記録

対 象：東京都足立区立第十中学校 1年3, 5組 27名

実施日：平成28年3月22日(火) 第2校時(9:35~10:25)

場 所：少人数教室

授業者：東京都足立区立第十中学校 菅田 圭一

T：去年，夏に北海道に行ったのですが，そこで撮った写真を見てもらいます。

S1さん，これは何に見えますか。

S1：道路

T：どういうふうに見える？

S1：真っ直ぐ見える。

T：そうですね。実は，この道路を，太郎さんという人が歩いています。

南北に通じる道路上を，太郎さんは歩いています。太郎さんは時速 3km で北の方向に進み，ある時刻に地点Oを通過しました。(課題場面の印刷物配布)

道を直線で表してみます。北へ歩いている，どちらの方向ですか。

S2：上

T：わかりました。上の方に歩いている，ですね。

では，1つめの質問をします。太郎さんは，2時間後にはどこにいますか？

2つめの質問です。太郎さんは，2時間前にはどこにいたのでしょうか？

(考える)

T：では，2時間後の太郎さんの位置，S3さん，どこだと思えますか。

S3：6km先。

T：方向を言うと？

S3：北

T：地点Oよりも北へ6km行ったところですね。では，2時間前は？

S4：地点Oから南へ6km行ったところ。

T：そうですね。では，次の問題です。

地点Oを通過してからの x 時間後のOから北への地点を y km とします。 x と y の関係を表や式で表してみましょう。

(考える)(指名する)

T：S5さん，この表，なぜこういうふうに数値を設定($x \geq 1$)したの？

S5：1時間後に3km進んで，2時間後に6km進んでいるから。

T：なるほど。では，S6さん，なぜこの数値(負~正)を設定したの？

S6：それまでの問題で，2時間前とかも考えているから。

T：そうですか。どちらが正しいのでしょうかね。

これ，2時間前という話しもしたし，あとは，通過してからっていう言い方をしている。つまり，通過する前の太郎さんの行動もあるんですよ。そうすると，自ずとマイナスの値が出てこない。

Oからスタートしたわけではなく，Oを通過してから，ですよ。そこを注意してみてください。そうすると，マイナスの値も重要になってきます。あとは，0ですね。ここもしっかり見てあげましょう。

次に，グラフをかいてもらいます。太郎さんのグラフをかきましょう。(グラフ表紙配布)(考える)

T：S7さん，黒板にグラフをかいてください。

(板書し，合っていることを確認する)

では，次の問題です。1.5時間後は太郎さんはどこにいますか。

2.5時間前は太郎さんはどこにいましたか。

(考える)

T：S8さん，1.5時間後は太郎さんはどこにいますか。

S8：地点Oから4.5km北の位置にいます。

T：そうですね。S9さん，2.5時間前はどこにいましたか。

S9：地点Oより南へ7.5kmの所にいます。

T：いいですね。では，最後にもう1つ問題を確認してみましょう。

太郎さんが時速 3km で歩いていることは，グラフ上のどの部分を見れば確かめられますか。

(考える)

S 1 0 : 1 時間に 3km 進むから、

T : グラフ上で言うと？座標で言うと、どこの座標ですか？

S 1 0 : (1, 3)

T : いいですね。座標で言うところ (1,3) ですね。

T : では、太郎さんと問題をいっぱいやりましたので、今度は問題を変えて考えていきましょう。

今は太郎さんでしたが、場面を変えて、もう 1 つ、花子さんという人が出てきますので、花子さんについて考えていきたいと思います。問題を配ります。

T : 同じ道を、今度は、時速 3km も同じですね。南の方向に花さんは歩いています。

また問題を考えていきましょう。S11 さん、南の方向はどっち？

S 1 1 : 下

T : そうですね。では、問題です。花さんは、2 時間後にはどこにいますか。花さんは、2 時間前はどこにいましたか。考えてみましょう。

(考える)

T : では、S 1 2 さん、2 時間後はどこにいますか。

S 1 2 : 地点 O から 6 km 南へ行ったところ。

T : 2 時間前はどこにいましたか。

S 1 2 : 地点 O から 6 km 北。

T : 地点 O より 6 km 北のところでしたんですね。いいです。

では、さっきと同じことをやってもらいます。では、表と式を書いてみてください。

地点 O を通過してからの時間を x 時間、O から北への距離を y km として、 x と y の関係を表や式、グラフで表してみましょう。

(グラフ用紙配布) (考える)

T : S 1 3 さん、表をかいてください。S 1 4 さん、式を求めてください。S 1 5 さん、グラフをかいてください。

S 1 4 さん、式を言ってください。

S 1 4 : $y = -3x$

T : これ、理由言える？

S 1 4 : 花さんは、下の方向に進んでいて、太郎さんと逆の方向に進んでいるから…

T : それでマイナスがつくと、いいですね。では、S 1 5 さん、なぜこういう数値の設定にしたのですか。

S 1 5 : 南に進んでいるから、2 時間後は -6 km。

T : こっち (x : 負) のほうも説明してもらっていい？

S 1 5 : 1 時間前は北に 3 km のところにいるから。

T : そうですね。さっきと逆というところに注意してください。

最後に、この問題をやっていきます。太郎さんと花さんの歩く様子をグラフや表にして書いてもらいました。2 つを比べてみて、どんなことがわかりますか。

(時間切れ)

次の授業で発表してもらいましょう。

(4) 研究協議

① 授業者から

- ・導入で、まっすぐな道の写真を見せたが、分かりづらそうだった。
- ・表をかかせたが、マイナスの範囲を考えていない生徒が多かった。グラフはスムーズにかけていた。
- ・課題場面 2 は課題場面 1 の間隔で解いている生徒が多かった。
- ・花さんのグラフは、マイナスや課題場面 1 と意味や違いを捉えていなく、同じグラフをかいている生徒がいた。
- ・式の意味 ($y = 3x$ の 3 や $y = -3x$ の -3) を捉えさせなければならなかった。
- ・2 時間前が -2 時間後になることや、課題場面 1 のところで O から北へ 6km 地点を $+6$ km とすると、O から南へ 6km 地点は -6 km と表されることの確認ができていなかった。

② 課題場面1について

- ・課題を導入するまでの生徒とのやりとりがやや速い。また、写真を使ったが、生徒から意見が出る前に先生が答えていた。
- ・課題を、図を使って、生徒全体が理解できたか丁寧に課題理解させたい。
- ・生徒の発言に教師がすぐに「いいね」「そうですね」と正解していることを伝えたが、その答え以外に生徒は考えていなかったのかを教師は把握し、授業で取り上げたい。
- ・(1),(2)基準を明確にしていない生徒がいた。
- ・(1),(2)は簡単に生徒とやりとりしながら、問題理解させる程度にして、(3)につなげたい。
- ・(2)で、「2時間前」を「-2時間」と表すことを必ず確認する。その後の指導で「Oから南へ6kmの地点」が「-6kmの地点」であることへつなげることが大切であると同時に、この授業のねらい(=グラフ上でのマイナスの意味を考える)達成のポイントである。
- ・(3)で、生徒がグラフをかくとき、目盛はノートの罫線やドットを使っていた。
- ・3つの表(指導案のア~ウ)を扱い、よかった。
- ・グラフにはx軸とy軸に単位を、y軸には南北も書き込ませるとよい。
- ・太郎と花子のグラフは1枚の用紙に書かせる。
(2枚別々にかかせたために、生徒の理解がみえたことはよかった)
- ・方向と位置を捉えさせるために、負の導入を丁寧に扱う必要がある。

③ 課題場面2について

- ・(10)で、「Oから南へ-6kmの地点」と記述した生徒に「太郎さんと方向を揃えるとどうなりますか」と問うと「Oから北へ6kmの地点」と書き換えた。
- ・(11)で、「どうして(比例定数は)-3なのですか」と問うと、「逆の方向だから」と答えられていた。符号が方向を表していることは理解できていたのではないか。

④ 全体を通して

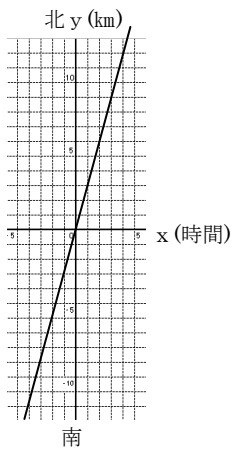
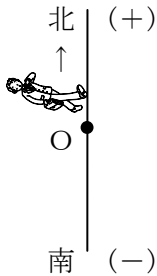
- ・この授業のねらいについて、以下の教材観で考察する。
 - ア 反対の向きの性質をもった数量を、基準を定めて+や-を用いて表すことができる。
 - イ 正負の数について、反対の向きの量を統一して捉えたり使ったりすることができる。
- ・本時のねらいについて、次のことを確認する。
 - ア 座標平面上のO, x軸上の正負の数, y軸上の正負の数の意味を、上記①②で捉えることができる。
 - イ 関数 $y = ax$ で表されるグラフは、 a の値によって形状が決まることを理解する。
- ・具体的な事象に関する式であれば、事象の解釈ができるようにする。
 - <形状>
 - ・ a の絶対値の大きさにより、傾き具合が決まる。
 $a > 0$ … 右上がりの直線 $a < 0$ … 右下がりの直線 → 日常場面に戻したときに理解解釈が欠落している。
 - <事象>
 - ・ a の絶対値の大きさが大きいと1あたり量が大きい。(例 速い)
 - ・ a の正負により、反対向きの意味でグラフを捉える。正・負の一对の価値判断をする。
(例 北・南の方向に行く。同じ時刻にOを通る場合は反対方向)
- ・課題場面1と2は別々に課題と捉えることもできる。連動していることを示す。
 - (案1) 課題場面1はそのまま、課題場面2に入るときに条件を与える。
 - ・花子と太郎はある時刻は同じ場所にいた。太郎の動きを表す座標平面上に、花子の動きを表すグラフを工夫してかいてみよう。
 - (案2) 課題場面1, 2を網羅する。太郎と花子の動きが把握できる課題場面に変える。
 - (その他) 条件をはっきりさせる。
 - ・太郎と花子は同じ時刻に基準Oにいる。進む方向は反対の向きである。
- ・指導案(7),(8)はカット。上記①②の内容の充実に専念する。
- ・生徒の主体的な活動ができる展開にする。
 - (例) 先生からの発問をひとつひとつ考えるより、時には大きめの発問(主発問)にして、活動を促す発問の工夫を!

(5) 改訂指導案

◎本時のねらい

- ・ 具体的事象を通して、表や式から関数 $y = ax$ のグラフをかく。
- ・ 関数 $y = ax$ の a の意味を、表やグラフから理解する。
- ・ 向きがある速さを、関数 $y = ax$ の a の意味やグラフなどから理解する。

◎本時の展開

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点																																																		
<p>課題場面を把握する</p> <p>xとyの関係を表や式で調べる</p> <p>表の「-」の意味を確認する</p> <p>xとyの関係をグラフで表す</p>	<p>課題場面</p> <p>南北に通じる道路上を、太郎さんと花子さんは歩いています。ある時刻の地点を基準のOとします。それぞれは同時に地点Oを通過しました。</p> <p>課題1</p> <p>太郎さんは時速3 kmで北の方向に進んでいます。太郎さんが、地点Oを通過してからx時間後にOから北へy kmの地点を通過したとして、xとyとの関係を調べましょう。</p> <p>(1) 表や式で表して、調べましょう。</p> <p>【表】</p> <p>ア</p> <table border="1" data-bbox="308 898 1062 999"> <tr> <td>x (時間)</td> <td>…</td> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>…</td> </tr> <tr> <td>y (km)</td> <td>…</td> <td>-9</td> <td>-6</td> <td>-3</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>…</td> </tr> </table> <p>イ</p> <table border="1" data-bbox="308 1039 930 1135"> <tr> <td>x (時間)</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>…</td> </tr> <tr> <td>y (km)</td> <td>0</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>12</td> <td>15</td> <td>…</td> </tr> </table> <p>ウ</p> <table border="1" data-bbox="308 1176 873 1272"> <tr> <td>x (時間)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>…</td> </tr> <tr> <td>y (km)</td> <td>3</td> <td>6</td> <td>9</td> <td>12</td> <td>15</td> <td>…</td> </tr> </table> <p>【式】</p> <p>ア $y = 3x$</p> <p>(2) 表のxの値-2はどういう意味ですか。 また、yの値-6はどういう意味ですか。 ア -2は、ある時刻より2時間前 イ -6は、地点Oより南へ6 kmの地点</p> <p>(3) xとyとの関係をグラフに表そう。</p> <p>ア</p> 	x (時間)	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…	y (km)	…	-9	-6	-3	0	3	6	9	…	x (時間)	0	1	2	3	4	5	…	y (km)	0	3	6	9	12	15	…	x (時間)	1	2	3	4	5	…	y (km)	3	6	9	12	15	…	<ul style="list-style-type: none"> ・ まっすぐな道の写真を見せる。写真に地点Oを入れておく。 ・ まっすぐな道を想像させる。縦の直線をかき、太郎さんが歩いている様子を確認する。  <ul style="list-style-type: none"> ・ アの表が生徒から出てこない場合は、イ、ウから、1分前、2分前…の太郎さんの位置の表し方を問う。 ・ $y = 3x$の式が正しいことを、アの表から確認する。 ・ 表で意味を確認する。 ・ 第IV象限までの座標平面、x軸、y軸、目盛りが印刷された紙を生徒に配布する。 ・ 単位 (km, 時間) や方向 (北, 南) を生徒に書きこませ、これらを意識させる。
x (時間)	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…																																											
y (km)	…	-9	-6	-3	0	3	6	9	…																																											
x (時間)	0	1	2	3	4	5	…																																													
y (km)	0	3	6	9	12	15	…																																													
x (時間)	1	2	3	4	5	…																																														
y (km)	3	6	9	12	15	…																																														

グラフから太郎の位置をよみ取る

x と y の関係をグラフで表す

グラフから方向や位置をよみ取る

- (4) 太郎さんは、ある時刻より 1.5 時間後はどこにいますか。
 また、2.5 時間前はどこにいましたか。
 ア 1.5 時間後は、地点 O から北へ 4.5 km の地点にいる。
 イ 2.5 時間前は、地点 O から南へ 7.5 km の地点にいた。

課題 2

花子さんは時速 3 km で南の方向に進んでいます。
 花子さんが、地点 O を通過してから x 時間後に O から北へ y km の地点を通過したとして、(3) の座標平面上に x と y との関係を表すグラフを工夫してかきましょう。

- (5) 工夫してグラフをかきましょう。

【表】

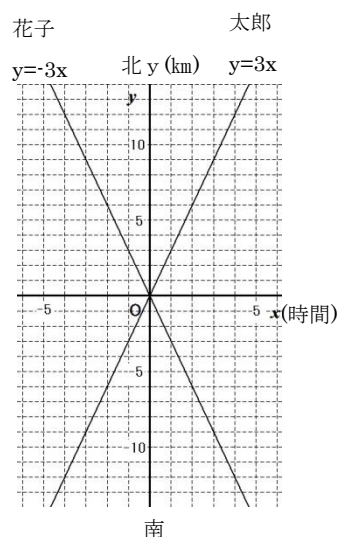
ア

x (時間)	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y (km)	...	9	6	3	0	-3	-6	-9	...

【式】

ア $y = -3x$

【グラフ】



- (6) どのようにグラフをかいたか、説明しましょう。
 ア 太郎さんが 1 時間後に地点 O から北へ 3km 地点にいたから、花子さんは 1 時間後に地点 O から南へ 3km 地点にいた。
 イ 太郎さんが 1 時間後に地点 O から 3km 地点にいたから、花子さんは 1 時間後に地点 O から -3km 地点にいた。
 ウ 太郎さんが $y = 3x$ だから、花子さんは $y = -3x$ 。

- (7) ある時刻より 3.5 時間前の 2 人の位置を、グラフを使って説明しましょう。
 ア 太郎さんは、地点 O から南へ 10.5km 地点、花子さんは、地点 O から北へ 10.5km 地点である。
 イ $x = -3.5$ のときの 2 人の位置を求めればよいから、太郎さんは -10.5km、花子さんは 10.5km である。
 ウ 2 人は 21km 離れている。
 エ 太郎さんの位置を表す点 $(-3.5, -10.5)$ と花子さんの位置を表す点 $(-3.5, 10.5)$ を結ぶ。

- 課題 1 で配布したグラフ用紙にかかせる。
- $y = -3x$ の式が正しいことを、アの表と対応させ、確認する。
- 課題 1 で確認した、表の x の値の -2 は 2 時間前、 y の値の -6 は南へ 6km 地点ということ再度、確認する。
- 座標平面のグラフの横に、「太郎 $y = 3x$ 」、「花子 $y = -3x$ 」とかかせる。

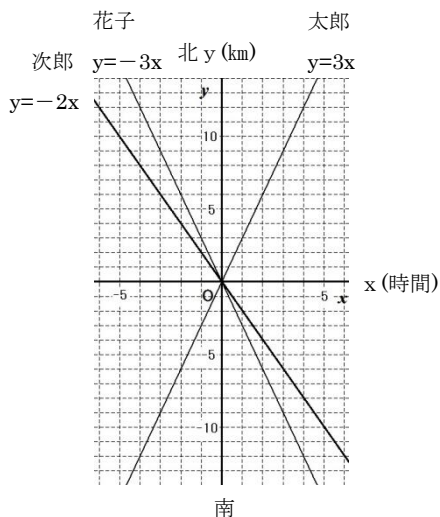
関数 $y = ax$ の a の値から、向きがある速さの意味を理解する

課題 3

次郎さんも同じ南北に通じる道路上を歩いています。次郎さんの歩いている様子を課題 2 (5) と同じ座標平面上にグラフで表し、式を求めると、 $y = -2x$ となりました。太郎さん、花子さん、次郎さんの 3 人が歩いている様子について考えましょう。

(8) 次郎さんの歩いているようすを説明しましょう。

ア $y = -2x$ のグラフをかき、その特徴を説明する。



- イ 時速 2km
- ウ 時速 -2km
- エ $a = -2$ だから、北から南の方へ歩いている。
- オ ある時刻に地点 O を通過した。

(9) 3 人の歩いているようすを考えましょう。

- ア 太郎さんだけ、北の方向に歩いている。
- イ 花子さんと次郎さんは同じ方向に歩いている。
- ウ 次郎さんより花子さんのほうが速い。
- エ 太郎さんと花子さんの歩く速さは等しい。
- オ 3 人は同時刻に地点 O を通過した。
- カ 太郎さんは、花子さんと次郎さんと地点 O ですれ違った。
- キ 花子さんは地点 O で次郎さんを追い越した。

・アの意見が出ない場合、教師がグラフを取り上げ、確認する。

・3 人それぞれの向きのある速さについて押さえる。
(方向、遅速)
・個々の動きを説明するのではなく、3 人の関係でその動きが説明できることを目指す。
・意見が出ない場合、3 人の動きの共通点や相違点を問う。

まとめ

課題 3 の問題を通して、向きがある速さ、グラフ、 $y = ax$ の a の意味をまとめる。

5. 今後の課題

今後は、次の①～④を課題として、研究を進めていく。

- ① 関数指導における速さの概念について、継続研究を行う。
- ② 小・中・高の算数・数学における速さの指導に関する教材を分析し、系統的な指導のあり方について研究を行う。
- ③ 他教科における速さの指導に関する教材を分析し、数学教育との繋がりを考察する。
- ④ グラフと速さに関する生徒の実態を把握し、理解するための学習段階の研究を進める。
そのために、調査問題を再構成し、実態調査を通してそれを追究する。

[引用・参考文献]

- 1) 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会
日数教(北海道)大会発表資料(2015)
「速さに関する関数の利用について(第2学年)～変化の割合を視点として～」
 - 2) 大日本図書(2013)「算数・数学科(小・中・高)のつながりー32のキーワードからー」 p.6
 - 3) 大西康太・中西正治(2012)
「正負の数の指導に関する実践的考察ー一元の立場に立った加法・減法の指導ー」,
第45回数学教育論文発表会論文集(第1巻),日本数学教育学会, pp.491-496
 - 4) 学校図書(2016)「中学校数学1」, pp.12-257
大日本図書(2016)「新版数学の世界1」, pp.9-260
啓林館(2016)「未来へひろがる数学1」, pp.12-222
教育出版(2016)「中学数学1」, pp.9-260
日本文教出版(2016)「中学数学1」, pp.10-246
数研出版(2016)「改訂版中学校数学1」, pp.12-223
東京書籍(2016)「新編新しい数学1」, pp.8-226
 - 5) 東京都中学校数学教育研究会研究部関数委員会(2012)「**中学校数学科 関数指導を極める**」,明治図書, pp.136-139
- 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会
- ・日数教(福岡)大会発表資料(2012)
「『変化の割合』の指導について
～第1学年 関数の利用におけるグラフのよみと関数 $y = ax$ の a の意味～
 - ・日数教(山梨)大会発表資料(2013)
「『変化の割合』の指導について
～第1学年 関数の利用場面における関数 $y = ax$ の a の意味～
 - ・日数教(鳥取)大会発表資料(2014)
「『変化の割合』の指導について
～速さに関する課題を、変域を拡げて考察する～
 - ・日数教(北海道)大会発表資料(2015)
「速さに関する関数の利用について(第2学年)
～変化の割合を視点として～」

東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会

小高 洋平 (豊島区立千川中学校)	塚本 桂子 (世田谷区立砧中学校)
風間喜美江 (統計数理研究所)	橋爪 昭男 (足立区立第十四中学校)
桑原 宏一 (練馬区立豊玉中学校)	半田 進 (元東北福祉大学)
菅田 圭一 (足立区立第十中学校)	稗田 浩士 (新宿区立新宿西戸山中学校)
齋藤 圭祐 (墨田区教育委員会)	堀 孝浩 (東京都立富士高等学校附属中学校)
関 富美雄 (渋谷区立上原中学校)	山本 恵悟 (足立区立千寿青葉中学校)
高村 真彦 (板橋区立高島第二中学校)	吉田 直樹 (元中野区立中野中学校)
高山 琢磨 (町田市立町田第一中学校)	吉田 裕行 (世田谷区立駒沢中学校)