「変化の割合」の指導について
～第１学年　関数の利用場面における関数ｙ＝ａｘのａの意味～

東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会

ページ
１．研究のねらい……1
２．研究の内容
（１）グラフのよみと関数ｙ＝ａｘのａの意味の指導について……２～３
（２）グラフの第Ⅰ象限から全象限への拡張……3
（３）第１学年　関数の利用の授業
①指 導 案……４～５
②授業記録……６～８
③研究協議……9
（４）改訂指導案の作成
①改訂指導案１……10～11
②改訂指導案２……12～13
３．研究のまとめ……14
４．今後の課題……14
参考資料
（１）「変化の割合」を視点とした関数指導 ……15
（２）第１学年における「変化の割合」の概念を育成するための視点…15
（３）関数の利用における「変化の割合」の指導……16
（４）第１学年指導計画……17～19
参考文献……20

１．研究のねらい

本委員会では、中学校関数指導において、「変化の割合」の意味の理解や、その概念の育成について、平成１３年度より研究を進めている。

関数の学習は、表･グラフ･式で表すことやその活用が大切であり、それぞれについて、「変化の割合」の見方や考え方があってこそ、表･グラフ･式が有機的に働くことになる。中学校３年間の関数指導を通して、「変化の割合」の概念、その見方や考え方の育成が必要であると考え、研究を進めている。

今回は、次のねらいで研究を進めた。

関数の利用場面で、関数ｙ＝ａｘについて、グラフを通してａの意味の理解を図る指導を、特にａ＜０の場合を中心に考察し、実践する。

２．研究の内容

（１）グラフのよみと関数ｙ＝ａｘのａの意味の指導について

本委員会は、関数指導において「変化の割合」の指導をすべての学年で行い、各学年の指導計画、指導内容、指導方法を検討している。

中１においては、小学校の比例・反比例の学習から、中学校関数の学習への移行について、いくつかの難しい問題点が含まれていると考える。

比例についていえば、比例の意味を中学校では単にｙ＝ａｘという式を中心に表し、考えていくということだけの問題ではない。その意味を引き出し、比例が関数の例として一意対応であることを意識するだけではなく、次の学習について展開されることが含まれている。

（ア）変数の変域を負の数にまで拡張して比例をとらえる （イ）比例定数ａの範囲も負の数まで拡げてその意味をとらえる

この内容は比例に限定したものではないが、本研究では、中学校の関数で初めて学習する中学１年の比例の学習に焦点を当て、「変化の割合」の指導の研究をすすめている。

問題解決における変化の割合の見方や考え方の利用は、（ア）や（イ）の学習の後に行われる。その中で、グラフのよみについては、グラフに表された２つの数量の関係をよみ取り、グラフを利用して、問題を解決することができるようにすることを重視している。

多くの指導は、ｘの変域が第Ｉ象限に限られ、ｙ＝ａｘでａ＞０の場面で課題を設定している。学習指導要領では、比例・反比例の学習において、変域を負の数にまで拡張することは述べられている。ｙ＝ａｘのａについては、ａが負の数まで含んでいることは述べられていない。また、教科書や他の研究事例でもａ＜０を取り上げたものは少ない。

そこで、昨年度の研究では、列車のすれ違いと追い越しという場面を設定し、関数ｙ＝ａｘのグラフを用いて事象を捉え、その説明をする「関数の利用」の実践を行った。そこでは、ａが正負の両方の値をとること、それらが反対の向きの量を表していることの理解に困難性があることがわかった。以下は、平成２４年５～６月に行った実態調査の結果の一部である。

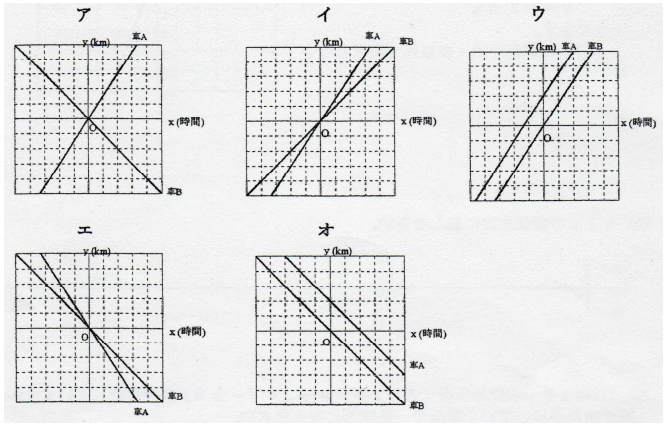
調査問題（東京都公立中学校３校、中２生徒207名（中１関数の学習修了生徒対象）

東西に走る道路があります。次のグラフは、その道路を走る車Ａ、Ｂの進行のようすを表したものです。ただし、ある時刻の走った道のりを基準０ｋｍとし、ｘ時間後に進んだ道のりをｙｋｍとしています。

① 略

② 車Ａ、Ｂのどちらかの車が他方を追い越す場合をすべて答えなさい。

③ 車Ａ、Ｂがすれ違う場合をすべて答えなさい。



ここで、②と③のクロス集計をしたデータをみると、以下の通りとなる（一部略）。

②＼③	ア	アイエ	イエ	ウオ	その他	無回答	計
アイエ	1.0	4.8	3.4	1.0	1.4	0.5	12.1
イエ	**◎28.0**	**18.8**	**0.5**	**1.0**	**2.9**	**0.5**	**51.7**
ウオ	1.9	2.9			1.5		6.3
その他	2.4	11.1	2.9	1.4	5.8		24.1
無回答	0.5	1.0				4.3	5.8
計	33.8	38.6	6.8	3.4	11.6	5.8	100.0

（単位％）

②で正答の「イエ」を選んだ生徒のうち、

③でも正解した生徒は、54.2%（＝28.0/51.7）である。

③で「アイエ」と答えた生徒は、36.3%（＝18.8/51.7）いる。

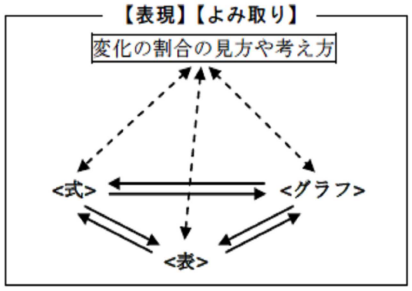
「すれ違う」ことを「追い越す」ことに含めたものと考えられる。

なお、③で正解した生徒のうち85%（＝28.0/33.8）は、②でも正答している。

このことから、すれ違うことが理解できている生徒は追い越すことも理解できているが、追い越すことが理解できていてもすれ違うことを確実に理解しているとは限らない。

小学校でのグラフは、座標平面上の第Ⅰ象限と考えることができる。中学校では、グラフは全象限に拡張され、また、ｙ＝ａｘのａは負の値を含む。しかしながら、その後の「関数の利用」では、小学校と同じ内容に留まっている指導傾向がある。つまり、その拡張やａが負の値を含むことを意識した既習事項の利用の指導が消極的であるといえる。学習は既習内容を利用してこそ、その深化が図られる。そこで、研究課題を継続し、変域の正負への拡張やｙ＝ａｘのａが負の値を含む具体的な場面の課題を開発し、その課題を通して、ａの意味を理解させる指導の実践を考えた。

ｙ＝ａｘでａの意味の理解には、右の図のように、表･グラフ･式を一体化した指導が必要である。その指導を通して、「表現」、「よみ取り」においては、「変化の割合」の見方や考え方を考察の道具として利用していくことが重要であり、その視点を鍵としながら、上記の意図した課題を開発した。



（２）グラフの第Ⅰ象限から全象限への拡張

中学校第１学年の比例を含む関数の学習は、その領域に至るまでに次の流れをとる。

正の数･負の数　⟶　文字と式　⟶　１次方程式　⟶　関数

また、正の数･負の数の単元では、数の範囲を負の数にまで拡張することにより、

（ａ）反対の方向や性質をもった数量を、基準を定めて＋やーを用いた数で表すこと

（ｂ）反対の向きの量を統一してみること

（ｃ）四則がいつでもできるようになること

ができるようになる。これらを踏まえ、中学校第１学年の比例を含む関数の学習が行われるが、現状では（ａ）～（ｃ）の関連を意識せずに指導が行われていることが多い。すなわち、座標平面や変数ｘ，ｙ、比例定数ａを負の数まで拡げているにもかかわらず、利用や活用の場面では既習事項が生かされていないということである。例えば、次のようなことがあげられる。

・具体的な場面から関数ｙ＝ａｘの式を導き、比例の定義をしているにも関わらず、変数ｘが負の数になる場合について考えさせていない。また、表は、変数ｘが正の数または０の場合のときのみを扱う。

・比例定数ａが負の数になる場面を考えさせていない。

・座標平面を第Ⅰ象限から全象限へ拡張させた後は、点の集合としてのｙ＝ａｘのグラフ（直線）を確認し、幾何的な見方でａ＞０とａ＜０のグラフをかかせる程度にとどまっている。

２．（１）の（ア）（イ）は、第１学年関数の学習では指導されているようにみえるが、「正の数・負の数については、反対の向きの量を統一してみること」などは意識された展開とはなっていない。特に、利用や活用の指導を意識すれば、関数のグラフについて上述の問題があり、その改善を図る必要がある。

（３）第１学年　関数の利用の指導（指導計画第１５時）

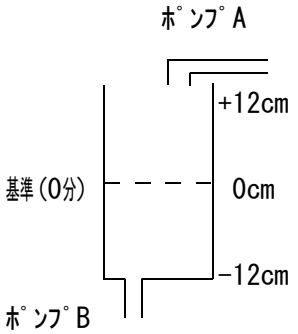
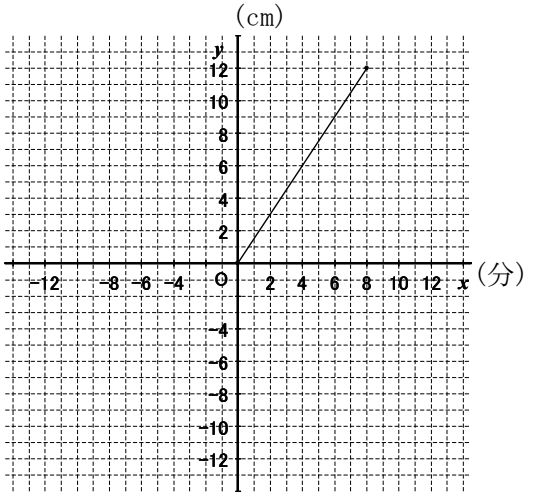
①指導案

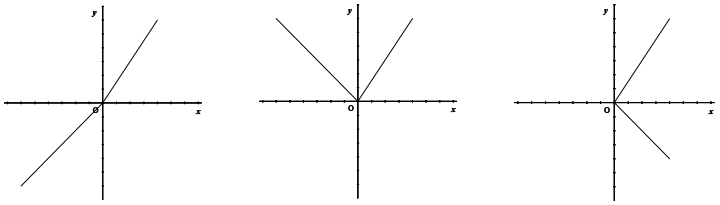
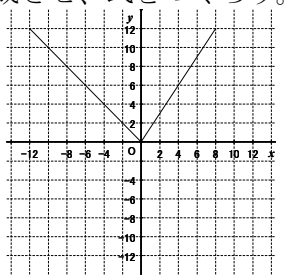
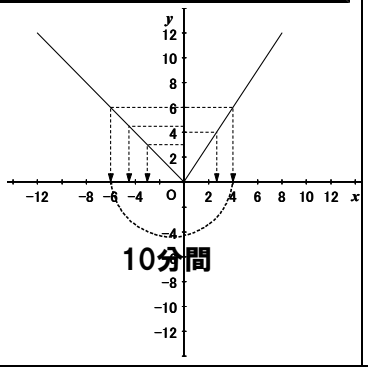
◎本時のねらい

・具体的な事象について、座標平面上の第Ⅰ～Ⅳ象限に現れる関数ｙ＝ａｘのグラフが表している意味をよみ取ることができる。

・関数ｙ＝ａｘのａの意味を，具体的な場面で見いだすことができる。

・関数的な見方や考え方を用いて，問題を解決することができる。

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
課題場面を把握する	**課題場面** 直方体の水槽に一定の割合で水を入れるポンプＡ、水を出すポンプＢがあります。 この水槽で、ある基準の時刻の水面の高さを０cm、ｘ分後の水面の高さをｙcmとします。  	・課題場面を提示する。 金魚が入った水槽の水を取り替える場面の話から課題場面のイメージをもたせる。 ポンプを動かすと、一定の割合で排水、給水が行われることを強調する。
グラフをよみ取る	課題１ 下のグラフは、ポンプＡだけを使い、基準から満水までの水面の高さのようすを表したものです。 このグラフからどんなことがよみ取れますか。  	・時間がたつにつれて、水位がどう変化するかを考えさせ、比例の関係であることに結びつけさせる。 ・ｘ、ｙ軸上に単位を書かずに、生徒とのやりとりでそれを確認してもよい。
	(1) グラフからどんなことがよみ取れますか。 ア　2分後には基準より3cmの高さになっている。 イ　基準から8分後に満水になる。 ウ　満水になるのは基準から12cmの高さである。 エ　水は一定の割合で給水されている。 オ　2分間で3cmずつ水位が高くなっている。 カ　給水の割合は1分あたり1.5cmである。 キ　式に表すとy＝1.5xである。 ク　毎分1.5cmずつ高くなる。 ケ　8分で12cmになる。	・意見が出てこない場合は、座標がよめるようにするための発問をする。

条件からグラフを考える	**課題２** はじめ、水槽は満水の状態でした。基準の時刻0分までは、ポンプＢのみを使い、1分間で1cmずつ水を出しました。水面の高さのようすを表すグラフを考えましょう。	
	(2) 水面の高さのようすを表すグラフの概形をかきましょう。 ア　イ　ウ 	・詳細なグラフは考えさせないように注意する。
	(3) 時間とともに水面の高さはどのように変化したのか説明しましょう。 ア　だんだん低くなり、基準を境に高くなる。 イ　毎分1cmずつ下がり、その後毎分1.5cmずつ上がる。	・この関数の定義域と値域をとらえ、変化のようすをことばで説明させる。 ・グラフと対応させながらことばの意味を確認する。
	(4) グラフを完成させ、式をつくろう。  ア　ｙ＝－ｘとｙ＝1.5ｘ イ　ｙ＝ －ｘ……－12≦ｘ≦０ のとき ｙ＝1.5ｘ…… ０≦ｘ≦８ のとき	・ｘ，ｙの変域に触れる。
ｙ＝ａｘのａの意味を考える	(5) ｙ＝1.5ｘとｙ＝－ｘの1.5、－１はそれぞれ何を表していますか。 ア　１分間で1.5cmずつ水位が高くなる。 イ　１分間で－１cmずつ水位が高くなる。 ウ　１分間で１cmずつ水位が低くなる。 エ　比例定数を表している。	・比例定数1.5や－１の意味を具体的な場面で確認する。
問題解決を図る	**課題３** 水面の高さが６cm以下になっているのは何分間ですか。	・グラフでどの部分をよみ取るか確認する。
	(6) 水面の高さが６cm以下になっているのは何分間ですか。 ア　10分間  	・ｙ軸上の６の値に対応するｘの値を、矢印で示す。また、６未満のいくつかの値も同様のことを行う。

②授業記録

◎対　　象：東京都町田市立町田第一中学校　２年２組　３８名

◎授業実施：平成２５年６月１０日　第３校時(10:40～11:30)

◎実施教室：２年２組教室

◎授 業 者：東京都町田市立町田第一中学校　高山　琢磨

課題場面を把握する

Ｔ：今日は、皆さんが１年のときに習った比例・反比例の学習をします。

Ｓ：ｙ＝ａｘ

Ｔ：そうそう、比例ですね。反比例は？

Ｓ：ｙ＝ａ／ｘ

Ｔ：そうですね。今日はその発展的な内容です。皆さん、金魚とか熱帯魚とか飼ってる人いますか？
どうやって水を替えますか？

Ｓ：金魚をほかの入れ物に移し替えて、全部の水を替えます。

Ｓ：入れ物にメダカを移して、水槽を洗って、新しい水を入れます。

Ｔ：そうですか。今日は水を入れ替えることを話題にしたいと思います。たぶん飼ってない人もイメージできると思いますが、こんなものを作ってきました。(水槽の模型を掲示する。)

Ｔ：今日はこういうことを考えます。水を抜いていって入れ替えたいと思います。
（水槽の模型を用いて水の水位の変化のようすを表す。）
今プリントを配るので、見ながら皆で考えていきましょう。(プリント配布)

Ｔ：初めのところを各自読んでください。まず、主人公はさかなクン。さかなクンが直方体の水槽に金魚を飼っています。水槽の水を入れ替えるのに、水をあるところまで捨てます。(模型で示す。)全部捨てたら、金魚が死んじゃいますよね。そしてまた水を入れて満水にしていきます。課題場面を見てください。読んでくれる人いますか？

Ｓ：直方体の水槽に一定の割合で水を入れるポンプＡ、水を出すポンプＢがあります。ある基準の時刻の水面の高さを０㎝、ｘ分後の水位をｙ㎝とします。

グラフをよみ取る

Ｔ：はい、ありがとう。基準ですね。ここを今、基準にしたいと思います。(模型で示す。)基準の時刻の水位がゼロということだから、ここを０分とします。ｘ分後の水はどうなっているかというところを考えていきます。グラフを見ながら考えていきましょう。まず初めに水を抜いてからまた水を入れていきますが、水を抜く方はちょっとおいておいて、水を入れていく方だけを考えます。課題場面の１番を見てください。今そこにグラフがありますね。下のグラフはポンプＡだけを用いて基準から満水までの水位のようすをグラフにしています。ポンプＡは水を入れる方ですよ。このグラフを見て何かよみ取れることはありますか?各自考えて気がついたことをかいてみてください。(机間支援)

Ｔ：はい、では気がついたことを言ってみてください。

Ｓ：２分ごとに水が３㎝増えています。

Ｔ：そうだね。これ気がついた人。１３人ですね。他にどうですか。

Ｓ：８分で満水になります。

Ｔ：８分で１２㎝、これ以上グラフがないですね。ここが満水だとよみ取れますね。これわかった人。１２人ですね。他、どうですか。

Ｓ：比例しています。

Ｔ：そうですね。何と何が比例していますか？

Ｓ：時間と水位です。

Ｔ：その通り。何でこれが比例だとわかりましたか?

Ｓ：原点を通る直線だからです。

Ｔ：そうですね。これわかった人？１１人ですね。他に気がついた人はいますか？

Ｓ：満水のとき、水位が１２㎝です。

Ｔ：どうしてわかりました？

Ｓ：８のとき１２だったからです。

Ｔ：そうですね、これ気がついた人。５人。他どうですか？

Ｓ：マイナスのほうにいかない。

Ｔ：何がいかないのですか？

Ｓ：直線が。

Ｔ：負の値はとらないってことですね。時間も水位もマイナスにならないですね。これ気がついた人、どのくらいいますか？３人。ちょっとこれは意外と難しかったかな？他ありますか。（挙手なし）

Ｔ：大体こんな感じかな。先生もこんな感じだと思います。もう一回おさらいすると、２分ごとに３㎝水位が増えている、８分で満水になった、水位が時間に比例している、満水の水位は１２センチである、時間も水位も負の値にならない、ですね。これで水を入れていくようすがわかったと思います。ここ（基準）から見ていくと、２分間で３㎝、２分間、２分間、２分間、ですね。（模型を用いて水の変化のようすを示す。）だから全部で何分？

Ｓ：８分です。

Ｔ：８分ですね。２分間が４回だから８分で１２㎝ですね。（模型で示す。）こんなようすが今よくわかったと思います。簡単ですか。でもこれから難しくなりますよ。では、今度は水を抜いていくようすを考えます。はじめ満水だったものを抜いていったわけですよね。このようすをグラフにしたいと思います。今からホワイトボードを配ります。４人グループを作ってください。（机を移動しグループを作らせる。）

条件からグラフを考える

Ｔ：では今からグラフをかきます。何をかいてもらうかというと、今度は水を抜いていくようすをグラフです。まずプリントを見てください。水を抜いていくようすを考えてみましょう。はじめ容器は満水の状態でした。満水から基準まで水を抜いたこの状態からのグラフがこれです。この前はどうなっているのかということを、ホワイトボードに皆で話し合ってグラフをかいてみてください。ｘ軸ｙ軸原点０をかいてください。今わかっていることは、水を入れていくようす、これはわかっています。これに対して水を抜いていくようすはどうか。話し合ってかいてください。その理由を前で発表してもらいますから、話し合ってください。概形だから、大体の形でいいです。（机間支援）

Ｔ：かくのやめてください。いろんなグラフが出てきたと思うけど、この班に説明をしてもらいましょう。

Ｓ：はじめは１２（㎝）のところにあって、０分まで時間が増えていきます。１分増えるごとに１㎝マイナスだから、時間がたつと（水位は）どんどん減っていきます。

Ｔ：どこまで？

Ｓ：原点までです。

Ｔ：そのあとは？かいてみてくれますか？

Ｓ：（グラフをかき加える。）

Ｔ：そうですね。他の考え方ありますか。

（他の班がかいた「くの字」のグラフを示して）

中にはこう考えたっていう人いませんか？はじめこう考えたっていう人？（挙手）

けっこういますね。どうしてこう考えましたか？

Ｓ：時間がたつにつれて水が減っていくからです。

Ｔ：減っていくね。でも、よく考えてみると、例えば、２分後って水位何㎝？３㎝なんですよね。２分後に３㎝とマイナス２㎝になっていますよね。

（グラフを指して、一つのｘの値に対して２つの値が対応していることを確認させる。）

これはおかしいでしょ。何でおかしいかっていうと？何ででしょう？

Ｓ：基準より水位が下がっています。

Ｔ：そうですね。（模型で金魚のいるところより下に水位が下がっているようすを示す。）

こうなっちゃったら、金魚が危ないですよね。

Ｓ：時間が戻っていません。

Ｔ：そう、抜いていくのは基準より前の話だから、こっちに来なきゃいけないですね。（ｘ軸負の方を示す）

だからこれが正しいってわかりますか？マイナス２分後は何㎝ですか？

Ｓ：２㎝です。

Ｔ：そうですね。じゃ、グラフを皆でかいてみましょう。左側のページのグラフの中にかいてみましょう。抜いていくようすをかいてください。できるだけ正確にかいてみてください。（作業）

Ｔ：それでは、前に出てかいてくれる人いますか。

Ｓ：はい。（グラフをかく。）

Ｔ：では黒板を見てください。１２㎝のところ、こうなってますよね。高さが同じになってますね。

（はじめと最後の水位の値を線で結ぶ。）

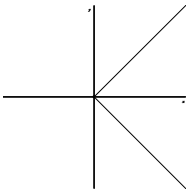
満水１２㎝ですからね。ｘが負のところでは、ｘが１増えるとｙが１減っているようすがグラフでわかりますね。

今回は、水槽の水を入れ替えるという具体的な場面を通して、比例における変化の割合が負の場合について学習しました。皆さんも、身のまわりで起こる事柄のなかで、二つの事柄が比例し、さらに変化の割合が負になる場合について探してみてください。それでは、今日の授業を終わりにします。

③研究協議

１．授業者自評

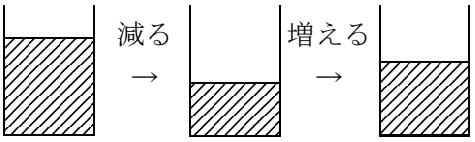
・話し合う時間を長めに取ったが、生徒は一生懸命やっていた。
・ワークシートの図に基準０分、０cmをかかなかったため、
混乱してしまったように感じる。
・はじめは、右の図のようなグラフをかく生徒が多かったが、
やりとりをする中で正しいグラフの概形がかけるようになっていった。
・水を入れることを先に扱うことに難しさを感じた。



２．協議

ア　授業全般について

・グラフと座標平面の拡張をテーマにしてこの授業が行われた。
生徒は徐々にテーマに沿った考えを出していった。
・課題1(1)のところで、ある生徒が「(グラフが) マイナスの方にいかない」という決定的な意見を出した。後の展開では、それを活かしきれなかった。
・課題場面の提示のときに、教具を使い、全体場面を提示できてよかった。



イ　拡張という視点から

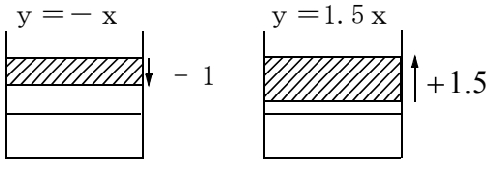
・例えば、「２分」の２という値は、０からの変化や基準からの変化としてとらえ直す場面が必要ではないか。２分ごとに３cm増えるという意見に対して、その意味をとらえ直し、２分後は何cm？１分後は何cm？というように、質問の質を変えることで、「～分後」から「～分前」へという視点を考えさせることが拡張の意味につながる。
・速さについて、方向を考えない状態から、方向を考える速度(ベクトル的な考え)という視点を入れていく。
・座標平面の拡張は、次の３段階の拡張がなされている。
　＊位置の数直線上での拡張（正負の数）
　＊時間と位置の数直線上での拡張（正負の数の乗法）
　＊２次元座標平面への拡張（関数のグラフ）
しかし、教科書等ではこの段階が意識されていない。
・マイナスにつながることばを用意する指導が拡張につながると考える。
(例)「２分後に３cm」→「＋２分で＋３cm」と言い直し、「２分前は…」ということばを生徒から引き出す。

ウ　グラフについて

・第Ⅰ象限で「～分後」をグラフで確認し、「～分前」につなげていく。
・１分前は２cmということであると、原点から左上がりに点をとるという思考の流れである。
・グラフの概形をつかむことは大切だが、点のとり方は１分前、２分前、…の順にとるしかないから、グラフをどのようにかいたかを問う必要がある。
・いきなりグラフをかかせるのはレベルが高い。
１分前は何cm？→何分間で０cmになったのか？→１あたり量を問う→満水だったのは何分前でしたか？を問う。
・方向をもった１あたり量を探すのは難しいが、排水の意味と右下がりのグラフをつなげて考えさせれば、その理解は可能となる。

エ　ｙ＝ａｘのａの意味について

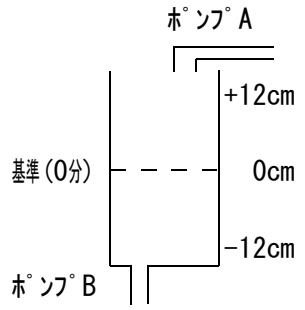
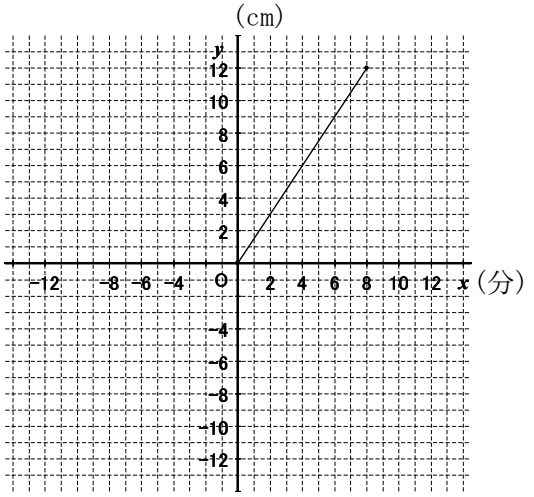
・授業ではｙ＝－ｘの指導までいかなかった。－１の意味をどのように出させるのかが課題である。
・今回の協議で、指導案の最終まではいけると考える。次回の実践ではそこまでしていきたい。
・右のような図を指導案に入れる。

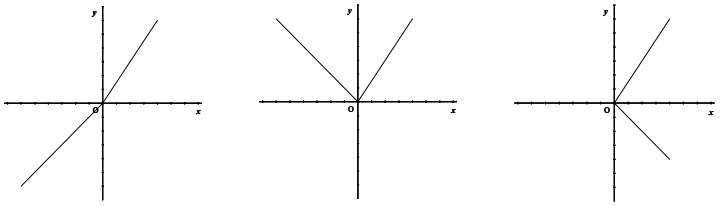
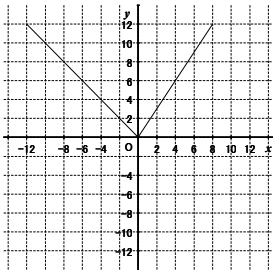
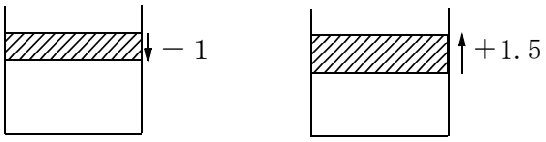
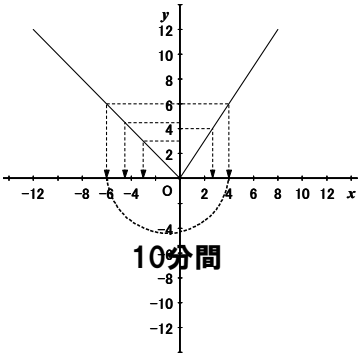


（７）第１学年　関数の利用の指導（指導計画第１５時）

①改訂指導案１

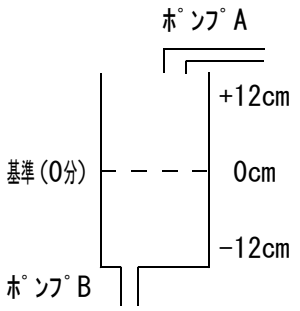
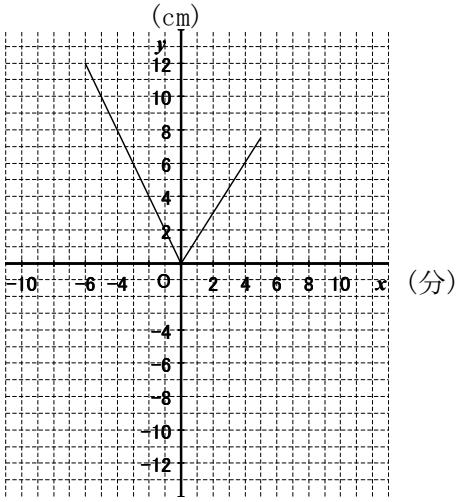
◎本時のねらいは４ページと同じ。

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
課題場面を把握する	**課題場面** 直方体の水槽に一定の割合で水を入れるポンプＡ、水を出すポンプＢがあります。 この水槽で、ある基準の時刻の水面の高さを０cm、ｘ分後の水面の高さをｙcmとします。 	・課題場面を提示する。金魚が入った水槽の水を取り替える場面の話から課題場面のイメージをもたせる。ポンプを動かすと、一定の割合で排水、給水が行われることを強調する。
グラフをよみ取る	課題１ 下のグラフは、ポンプＡだけを使い、基準から満水までの水面の高さのようすを表したものです。 このグラフからどんなことがよみ取れますか。 	・ポンプはＡ，Ｂ同時に使わないことを強調する。 ・時間がたつにつれて、水位がどう変化するかを考えさせ、比例の関係であることに結びつけさせる。 ・ｘ、ｙ軸上に単位を書かずに、生徒とのやりとりでそれを確認してもよい。
	(1) グラフからどんなことがよみ取れますか。 ア　2分後には基準より3cmの高さになっている。 イ　基準から8分後に満水になる。 ウ　満水になるのは基準から12cmの高さである。 エ　水は一定の割合で入っている。 オ　2分間で3cmずつ水位が高くなっている。 カ　水を入れる割合は1分あたり1.5cmである。 キ　式に表すとy＝1.5xである。 ク　毎分1.5cmずつ高くなる。 ケ　8分で12cmになる。	・意見が出てこない場合は、座標がよめるようにするための発問をする。
条件からグラフを考える	課題２ 課題１のポンプＡを使う前は、水槽は満水の状態から、ポンプＢのみを使いました。ポンプＢは１分間で１cmずつ水を出していきました。満水から再び満水になるまでの水面の高さのようすを表すグラフを考えましょう。	・課題２が把握しづらい生徒には、満水から排水、給水までのようすを図や教具等で再度示す。
	(2) 水面の高さのようすを表すグラフの概形をかきましょう。	・詳細なグラフは考えさせないように注意する。

	ア　イ　ウ  	・ウのようなグラフの概形を考えた生徒には、「２分後の水面の高さは何cmですか？」と問いかけて、時間のとり方に誤りがあることに気づかせる。
	(3) 時間とともに水面の高さはどのように変化したのか説明しましょう。 ア　だんだん低くなり、基準を境に高くなる。 イ　毎分1cmずつ下がり、その後毎分1.5cmずつ上がる。	・この関数の定義域と値域をとらえ、変化のようすをことばで説明させる。 ・グラフと対応させながらことばの意味を確認する。
	(4) グラフを完成させ、式をつくろう。  ア　y＝－xとy＝1.5x イ　y＝ －x……－12≦x≦0　のとき y＝1.5x……　0≦x≦8　のとき	・x，yの変域に触れる。
y＝axのaの意味を考える	(5) y＝1.5xとy＝－xの1.5、－１はそれぞれ何を表していますか。 ア　１分間で1.5cmずつ水面の高さが高くなる。 イ　１分間で－１cmずつ水面の高さが高くなる。 ウ　１分間で１cmずつ水面の高さが低くなる。 エ　比例定数を表している。 y＝－x　　y＝1.5x  	・比例定数1.5や－１の意味を具体的な場面や図で確認する。
問題解決を図る	課題３ 水面の高さが６cm以下になっているのは何分間ですか。 (6) 水面の高さが６cm以下になっているのは何分間ですか。 ア　10分間  	・グラフでどの部分をよみ取るか確認する。 ・ｙ軸上の６の値に対応するｘの値を、矢印で示す。また、６未満のいくつかの値も同様のことを行う。

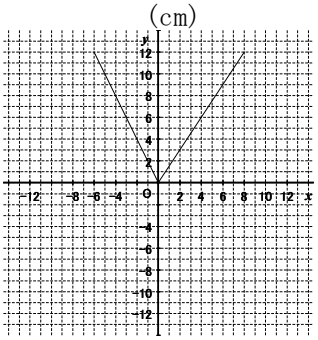
②改訂指導案２

◎本時のねらいは４ページと同じ。

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
課題場面を把握する	**課題場面** 直方体の水槽に一定の割合で水を入れるポンプＡ、水を出すポンプＢがあります。 この水槽で、ある基準の時刻の水面の高さを０cm、ｘ分後の水面の高さをｙcmとします。  	・課題場面を提示する。 金魚が入った水槽の水を取り替える場面の話から課題場面のイメージをもたせる。 ポンプを動かすと、一定の割合で排水、給水が行われることを強調する。
グラフをよみ取る	課題１ 下のグラフは、ポンプＡまたはポンプＢのどちらか１つを使い、時間にともなう水槽の水面の高さの変化のようすを表したものです。 このグラフからどんなことがよみ取れますか。  	・ポンプＡとポンプＢは同時に使わないことを確認する。 ・時間がたつにつれて、水位がどう変化するかを気付かせ、比例の関係であることに結びつけさせる。
	(1) グラフからどんなことがよみ取れますか。 ア　2分後には基準より3cmの高さになっている。 イ　水は一定の割合で給水または排水されている。 ウ　満水のときは、基準から12cmの高さである。 エ　給水時は2分間で3cmずつ水位が高くなっている。 オ　給水の割合は1分あたり1.5cmで、排水の割合は1分あたり2cmである。 カ　式に表すとy＝1.5xとｙ＝－２ｘである。 キ　毎分2cmずつ低くなり、その後1.5cmずつ高くなる。 ク　はじめポンプＢを使って水を出し、基準の時刻０分からはＡを使って水を入れた。 ケ　グラフが右下がりのときはポンプＢだけ、右上がりのときはポンプＡだけを使った。 コ　基準から8分後に満水になる。	・意見が出てこない場合は、ポンプＡを使用したときのグラフの部分やポンプＢを使用したときのグラフの部分を問う。 ・式の1.5や－2の意味に触れる。

(2) ５分後以降もポンプＡのみを使い、満水にしました。
課題１のグラフを完成させなさい。

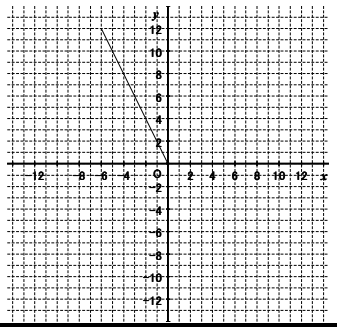
ア　(cm)



課題２

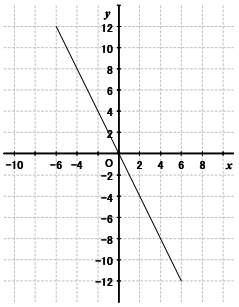
下のグラフはポンプＢだけを使い、基準の時刻０分までの水面の高さのようすを表したものです。

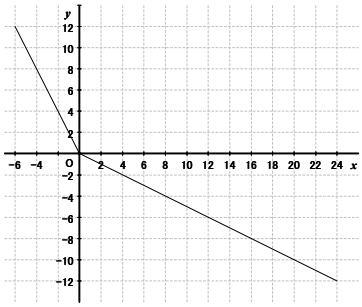
その後、ポンプＡ，Ｂを同時に使う、またはどちらか一方だけを使い、水槽を空にしたい。その計画をグラフに表そう。　(cm)



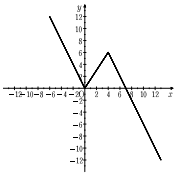
・課題２が把握できない生徒には、次のようなことを問う。
1 この後は水位は上がる?下がる?
2 与えたグラフは、水位は上がっているの?下がっているの?
3 グラフは課題1と同じようなV字型になるかな?
4 空になるのは、図のどの位置かな?

(3) 水面の高さのようすを表すグラフをかきましょう。

ア　 

イ　 

・生徒の実態に応じてx＝24までのグラフを与えてもよい。
・右のようなグラフをかく生徒もいる。



ア：ポンプＢのみを使う

ｙ＝－２ｘ……－６≦ｘ≦０のとき

イ：ポンプＡとＢの両方を使う

ｙ＝－0.5ｘ　……　０≦ｘ≦24のとき

A使用

x	0	1	2	3	4
y	0	1.5	3	4.5	6

B使用

x	0	1	2	3	4
y	0	－2	－4	－6	－8

同時使用

x	0	1	2	3	4
y	0	-0.5	-1	-1.5	-2

・ｘ，ｙの変域を確認する。
・比例定数の意味「水位が上がることを正とするときの水位の変化」であることを確認する。
・生徒の計画のグラフ上での意味を確認する。
・ｙ＝－0.5ｘの－0.5は、表から示される程度にとどめ、深入りはしない。

(4) どのようにグラフをかいたか、説明しよう。

ア：Ｂのみ使用のときは、１分間で２cm下がるから
ｙ＝－12まで点をとり、結んだ。

イ：表からｙ＝－0.5ｘを求め、ｙ＝－12を代入し、
ｘ＝24を求め、グラフを完成させた。

３．研究のまとめ

本研究のねらいは、関数の利用場面で、関数ｙ＝ａｘについて、グラフを通してａの意味の理解を図る指導を、特にａ＜０の場合を中心に考察し、実践することであった。実践を通して、以下のような結果が得られた。

・具体的な事象について、関数ｙ＝ａｘのａの意味の理解する機会となり、視覚的にも捉えることができたと考える。その際、ａが負の場合も含めて指導することが大切である。
・正の数･負の数の単元での既習事項の理解については困難性を示している。反対の方向や性質をもった数量を、基準を定めて＋やーを用いた数で表すことや、反対の向きの量を統一してみることと、ｘやｙの変域が負のときの考え方を結びつける指導が大切である。
・変数の変域を負の数にまで拡張して比例を捉えなければならない。そのときに、「～分後」から「～分前」へという視点を考えさせることが大切である。
・この課題では、「変化の割合」の見方や考え方を考察の道具として、変化のようすを表現したりよみ取ったりすることができるようになった。

４．今後の課題

本委員会では、具体的な事象を関数的に捉え、考察する課題を開発していく中で、一人ひとりの生徒の関数概念の理解が、どのように高まり深まるかを、授業実践を通して考察している。具体的には、授業の中で、さまざまな学習内容をどのように指導すれば、生徒の関数概念が高まるかについて、実証的に検証していく。

今後は、次の①～③を課題として、研究を進めていく。

① 各学年において、「変化の割合」の見方や考え方を視点として関数の利用の指導計画・指導案を見直す。
② 「変化の割合」の概念を育成するために、学習段階（P19参照）に留意して、改訂指導計画・改訂指導案を作成し、研究授業を通して実証的に検証する。
③ ②についての学習経験を積ませ、どのように生徒が「変化の割合」の概念やその活用の力を身につけたかについて、その変容を明らかにし、さらなる指導の改善を行う。

参考資料

（１）「変化の割合」を視点とした関数指導

本委員会では、中学校の関数指導のねらいとして、次の３つを考えている。

①具体的事象から､関数関係にある２つの数量を見いだすことができるようにさせる。

②関数関係にある２つの数量の変化のようすや対応のしかたの特徴を調べたり、基本的な関数についての特徴を、表･グラフ･式などから考察したりすることで、理解させる。

③関数的な見方･考え方により、問題解決を図ることができるようにさせる。

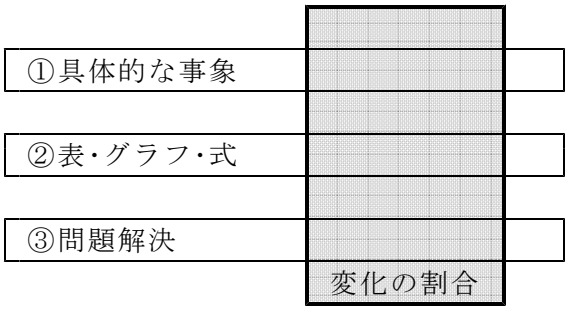
関数指導のねらいを達成するために､「変化の割合」の見方や考え方の育成を重点とし、次の流れで指導を考える。

・第１学年では、小学校の指導を意識した「変化の割合」の素地的な学習を行い、第２学年への橋渡しを行う。

・第２学年の「変化の割合」の指導では、１次関数の定義の指導後、「変化の割合」の定義を形式的に与えるのではなく、具体的な事象の考察を通して「変化の割合」の意味の理解や、その概念の育成の指導を行う。

・第３学年では、具体的な事象の考察を通して「変化の割合」の意味や概念をさらに深める指導を行う。

関数指導における「変化の割合」の指導の位置付けは、各学年とも右の図のような考えで、各学年の指導計画、指導内容、指導方法を構成していくことにする。つまり、関数指導のねらいのすべての中で､「変化の割合」の見方や考え方を視点として指導していく。



（２）第１学年における「変化の割合」の概念を育成するための視点

第１学年のこれまでの多くの指導は、比例 $y=ax$ では（yの値）／（xの値）が比例定数 a であることを中心に行われていた。 xの値が１増加するときの yの増加量が aであることは、表やグラフで確認する程度の指導であった。本委員会では、下の図を意識した指導が必要であると考えた。

比例 $y=ax$ において

$$\frac{y\text{の値}}{x\text{の値}}=a \quad \cdots \quad *$$

↓

$$\frac{y\text{の値}-0}{x\text{の値}-0}=a \quad \cdots \quad **$$

↓

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=a \quad \cdots \quad ***$$

したがって、第１学年では、上の図の「＊から＊＊」への指導を具体的な場面を通して丁寧に行うことが重要で、その上で「＊＊から＊＊＊」へ高めていく指導を行う必要がある。

（３）関数の利用における「変化の割合」の指導

(1)で示した関数指導のねらい③は、本稿では関数の利用として位置付け、①、②の既習事項を利用し、問題解決を図ることである。既習事項は使ってこそ、その定着をみることができ、また有機的な利用によって、関数指導のねらいが達成できると考える。

具体的な内容として、次の視点で指導を行う。

・表･グラフ･式などの相互の関連を理解し、問題を解決したり、自分の考えを表現したり、伝え合ったりすることができる。

・「変化の割合」の意味を理解し、それを活用して問題解決をすることができる。

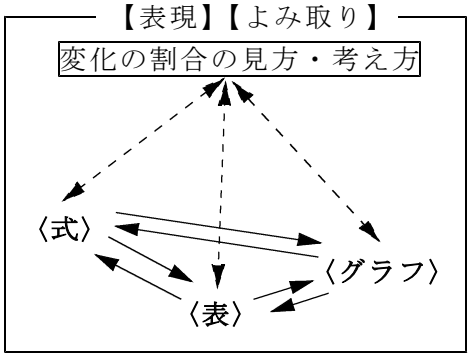
・日常生活や社会における事象について、関数的に捉えることができる。

①②における、表･グラフ･式ついて、これまでの指導で多く言われてきたことは、「表･グラフ･式を表すときは、これらを並列的に扱ったり、別々のものとして扱ったりするのではなく、１つの関数関係について表･グラフ･式の表し方が一体となって理解されなければならない。」である。また、「関数関係を表･グラフ･式に表すことは、それによって関数関係の変化や対応の特徴を捉えることがねらいである。」である。この考えは③においても同様である。これらは、どれも表･グラフ･式の表現に議論が集中している。しかし、本委員会ではそれらの考えを一歩踏み込み、「表現」だけではなく、それらの「よみ取り」を通しての指導も重点に加えること、さらに関数概念の育成に重要な視点である「変化の割合」の見方や考え方を重要視した指導を加えることにした。その加わった視点とともに関数指導を考察することで、関数指導のねらいを達成できると考えた。

以上の考えをまとめると右のような関係になる。

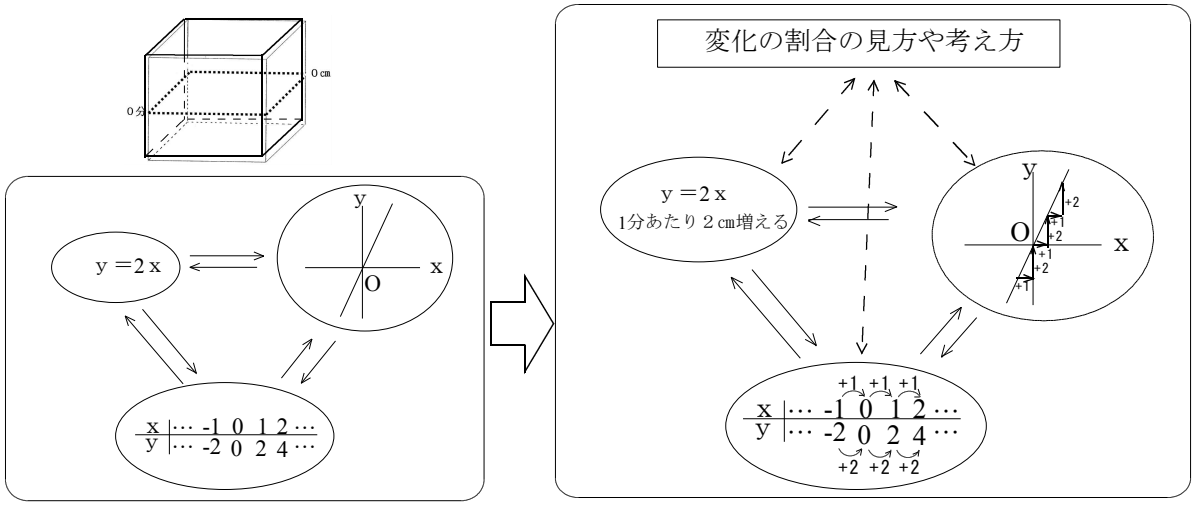
表・グラフ・式の一体化した指導だけでなく、それらの「表現」、「よみ取り」において、「変化の割合の見方や考え方」を学習の考察の道具として利用していくことが大切である。

そして、「関数の利用」においては、この指導の重点をもとに、学習内容を有機的に活用することにより、関数関係の理解の深化や、問題解決を図る力を伸ばすことができると考えた。

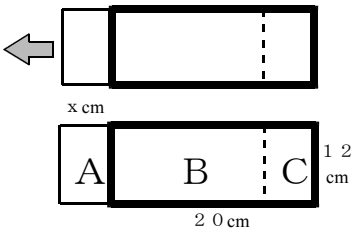
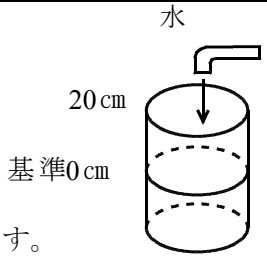
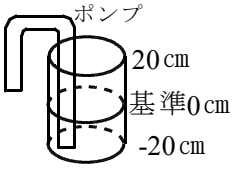
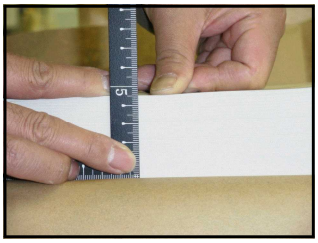
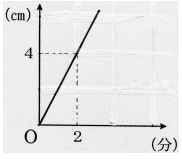
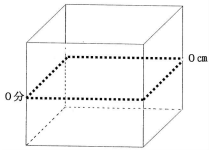


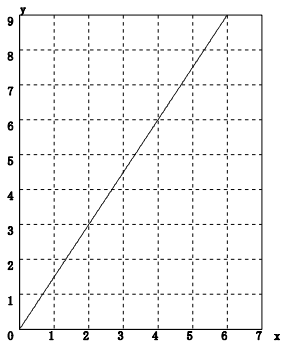
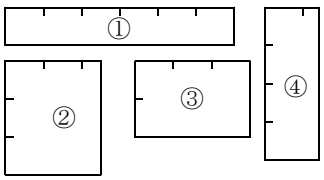
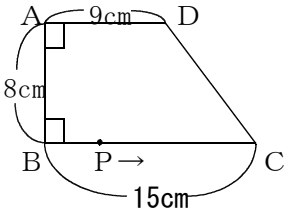
－【表現】【よみ取り】の具体的な例－（第１学年指導計画　第７時）

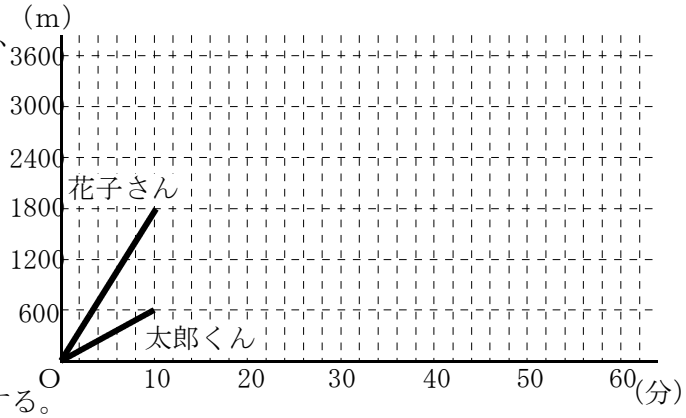
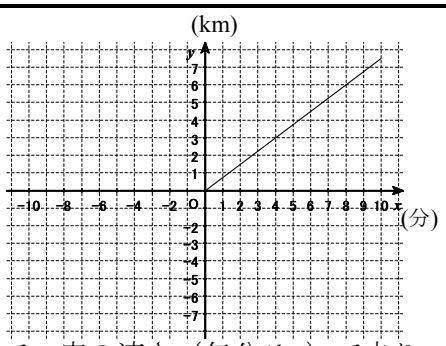
［課題場面］水そうに１分間に２cmずつの割合で水を入れていく。



（４）第１学年　指導計画　　※【　】はＰ１９の学習段階を示している。

時数	項　目	学　習　内　容
1	ともなって変わる量 【第１段階】	［課題］封筒から画用紙を引き出していくと何が変わりますか。 ① 変化する量・変化しない量をあげる。 （ｉ）引き出した長さと周囲の長さとの関係を調べる。　$y=2x+64$ （ii）引き出した長さとＡの部分の面積との関係を調べる。　$y=12x$ 
2	【第１段階】	（iii）引き出した長さと全体の面積との関係を調べる。 $y=240+12x$ （iv）引き出した長さとＢの部分の面積との関係を調べる。 $y=240-12x$ ② 「ｙはｘの関数である」ことを定義する。 ③ 「変域」を定義する。
3	関数$y=ax$ 【第１段階】	［課題場面］右の図のような水そうに毎分２㎝ずつ水面の高さが増すように　水を入れていきます。 ① １分後，２分後，３分後，・・・の水面の高さを調べ、表にまとめる。 ② １分前，２分前，３分前，・・・の水面の高さを調べる。 ③ ｘ分後の水面の高さをｙ㎝として、ｙをｘの式で表す。 ④ 「ｙはｘに比例する」ことを定義する。 
4	【第１段階】	［課題場面］右の図のような水そうから、水面の高さが毎分２㎝ずつ減るように水をぬいていきます。 ① 第４時と同じように、表をかいて調べる。 ② ｙはｘに比例することを確認する。 ③ 練習問題を行う。 
5 6 第 1 案	比例定数の意味 【第１段階】 【第２段階】 【第３段階】	［課題場面］（５００枚の）紙の束を見せる。 ［課題１］　５００枚の紙の厚さは４０㎜です。 紙の枚数を調べるとき、実際に数えなくても紙の厚さを調べれば紙の枚数がわかります。 他のいろいろ中身の枚数と紙の厚さの関係を表をかいて調べてみよう。 ［課題２］紙の厚さが８㎜増えると紙の枚数は何枚増えますか。 　また、紙の厚さが１０㎜増えると紙の枚数は何枚増えますか 
5 6 第 2 案	比例定数の意味 【第１段階】 【第２段階】 【第３段階】	［課題場面］佐渡島の面積を求めましょう。 ① この面積をどのように求めるか班ごとに考えて発表する。 ② 面積と重さの関係を表に表す。 ③ 表から、面積と重さはどのような関係になっているかを調べる。 ④ 比例と判断した理由を考える。 ⑤ 比例定数の意味を考える。 ⑥ 粟島の紙を加えたり、佐渡島の湾を埋め立てたりすると面積はどれくらい増えるかなど，増加量を考える。
7	関数$y=ax$ のグラフ 【第１段階】 【第２段階】 【第３段階】	［課題場面］水そうに、１分間に２㎝ずつの割合で水を入れていく。 ① 具体的な場面をもとに表をかく。 ② 与えられたグラフの意味を確認する。 ③ 負へ拡張し、グラフを想像する。 ④ 点の位置を座標を用いて表現する。与えられた座標をもつ点をとる。 ⑤「座標軸，原点，ｘ軸，ｙ軸，ｘ座標，ｙ座標」の用語を与える。 ⑥ グラフを完成する  

8	【第１段階】	① $y=2x$，$y=x$ ，$y=\frac{1}{2}x$のグラフをかき、気づいたことをあげる。
	【第２段階】	② $y=-2x$，$y=-x$，$y=-\frac{1}{2}x$のグラフをかき、気づいたことをあげる。 ③ $y=ax$のグラフの特徴についてまとめる。 ④ $y=2x$，$y=-2x$のグラフを見て、ｘが１増加するときのｙの増加量はどのように変化しているかについて、その理由も確認する。また、ｘ，ｙの増加量を確認する。
9		⑤ $y=ax$のグラフを工夫してかく方法を考える。 $y=3x$，$y=-3x$，$y=\frac{2}{3}x$
１０	式の決定 【第１段階】 【第２段階】	［課題場面］高さが３０㎝の直方体状の空の容器に、一定の割合で水を入れています。 水を入れて初めてからｘ分後の水面の高さをｙ㎝として、ｘとｙの関係をグラフに表しました。 ① ｘとｙとの関係を考える。 ② ｘの変域，ｙの変域を求める。 ③ 比例の式を求める練習問題をする。 (1) 表から式を求める (2) グラフから式を求める (3) 条件から式を求める 
１１	反比例とそのグラフ 【第１段階】	［課題］右の４つの長方形の中で一つだけ他と違うものがあります。どれでしょうか。 ① 面積が６㎠である長方形について調べる。 ② $y=\frac{6}{x}$について調べる。 （ｘの変域を負へ拡張する） ③ $y=-\frac{12}{x}$について調べる。 ④ 「ｙはｘに反比例する」ことを定義する。 
１２	【第１段階】	① $y=\frac{6}{x}$ のグラフをかく。 ② $y=-\frac{12}{x}$ のグラフをかく。 ③ 双曲線を定義し、$y=\frac{a}{x}$のグラフの特徴をまとめる。
１３	【第１段階】 【第２段階】	［課題］A地からB地までの道のりを、行きは時速4㎞の速さで5時間歩きました。 ① 帰りは時速ｘ㎞の速さでｙ時間歩いたとするとき、ｙをｘの式で表しなさい。 ② ｘとｙの関係は何か。比例定数２０は何を表すか。 ③ 帰りは時速３㎞の速さで歩いたとすると、かかった時間はどれだけか。 ④ １組のｘ，ｙの値から立式をする。 ⑤ 練習問題を行う。
１４	関数の利用 【第１段階】 【第２段階】	［課題］図のような台形ＡＢＣＤで、点Ｐは毎秒１㎝の速さで、ＢＣ上をＢからＣまで動きます。 ① 時間と比例するものを見つける。 ② 見つけた関係が比例になっているかどうか確認する。 ③ △ＡＢＰの面積が10㎠増えたとき、点Ｐは何秒間動いたかを調べる。 ④ 面積が10㎠増えるのは、何秒後から何秒後までか調べる。 

１５ 第 １ 案	(グラフのよみ) **【第１段階】** **【第２段階】**	［課題場面］ 花子さんと太郎君は、Ａ駅から3600ｍ離れたＢ公園に行きました。花子さんは自転車で、太郎君は歩きました。下のグラフは、２人がＡ駅から出発してから途中までの２人の動くようすを表したものです。  ① わかることを発表する。 ② グラフを使って問題を解決する。 (i)出発してから１０分後の地点で花子さんは本を落とした。その本を太郎君が拾うのは、出発してから何分後になるかを調べる。 (ii)花子さんと太郎君との差が1800ｍになるのは出発してから何分後になるかを調べる。 ③ 往復運動や休憩をとった場合にグラフはどうなるかを考え、発表する。 ④ Ａ駅から3600ｍ離れたＢ公園までの道のりを動くようすをグラフに表して、問題を作る。
１５ 第 ２ 案	(グラフのよみ) **【第１段階】** **【第２段階】** **【第３段階】**	［課題場面］Ａ駅からＢ駅に向かう「あ(赤)電車」があります。右のグラフは、途中のＫ踏切からＢ駅まで走るようすを表しています。  ① グラフからわかることを発表する。 ② あ電車はＫ踏切を通過する８分前にＡ駅を出発したとき、あ電車のグラフを完成させる。 ③ み(緑)電車はＢ駅を出発してＡ駅まで一定の速さ（毎分1km）で走り、Ｋ踏切であ電車とすれ違うとき、グラフの概形を考える。 ④ グラフを使って問題を解決する。 (i) あ電車とみ電車が3.5km離れるのはいつですか。 (ii)グラフ上であ電車とみ電車の走るようすが同時によみ取れることを確かめる。
１５	(グラフのよみ)	＊今回の発表
１６	問題練習	

「変化の割合」の概念を育成するために、本委員会は、指導者が次のような学習段階を意識することが必要であると考えた。これらの学習段階を踏まえ、中学校３年間の関数指導計画を立てた。

※「指導の流れと学習段階」

「変化の割合」の概念を育成する指導の流れ ＼ 学習段階		【第１段階】 xの増加量が１の場合	【第２段階】 xの増加量が2,3…の場合	【第３段階】 xの増加量が小数(分数)の場合
比例 $y=ax$	$\frac{y\text{の値}}{x\text{の値}}=a$			
	$\frac{y\text{の値}-0}{x\text{の値}-0}=a$			
	$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=a$			
１次関数 $y=ax+b$	$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=a$			
関数 $y=ax^2$	$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$			

［参考文献］
（１）東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「関数の導入および利用の指導について」　〈日数教(福岡)大会発表資料〉　1987(S62)年
（２）東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「『関数の利用』の指導について」　〈日数教(静岡)大会発表資料〉　1988(S63)年
（３）東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「『関数の利用』の指導について」　〈日数教(千葉)大会発表資料〉　1989(H元)年
（４）東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「『関数の利用』の指導について」　〈日数教(愛媛)大会発表資料〉　1990(H2)年
（５）東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「中学校関数カリキュラムについて」　〈日数教(群馬)大会発表資料〉　1997(H9)年
（６）東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「中学校関数カリキュラムについて」　〈日数教(山口)大会発表資料〉　1998(H10)年
（７）東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「『変化の割合』の指導について」　〈日数教(長野)大会発表資料〉　2005(H17)年
（８）東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「『変化の割合』と学習段階」　〈日数教(福島)大会発表資料〉　2008(H20)年
（９）東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「『変化の割合』を視点とした関数カリキュラム」
〈日数教(京都)大会発表資料〉　2009(H21)年
(10) 東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「『変化の割合』の視点による中１生徒の実態分析」
～新学習指導要領移行期において、指導の問題点をあらためて探る～
〈日数教(新潟)大会発表資料〉　2010(H22)年
(11) 東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「『変化の割合』の指導について」～第１学年「関数の利用」場面で～
〈日数教(神奈川)大会発表資料〉 2011(H23)年
(12) 東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「『変化の割合』の指導について」
～第１学年　関数の利用におけるグラフのよみと関数ｙ＝ａｘのａの意味～
〈日数教(福岡)大会発表資料〉　2012(H24)年
(13) 風間喜美江
関数のグラフの第Ⅰ象限から全象限への拡張－比例の指導を中心として－
〈近畿数学教育学会発表資料〉　2012(H24)年
(14) 東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会
「中学校数学科　関数指導を極める」　明治図書　2012(H24)年

東京都中学校数学教育研究会　研究部　関数委員会

稲垣　京子（新宿区立新宿中学校）	遠藤　國雄（元板橋区立向原中学校）
小高　洋平（豊島区立千川中学校）	風間喜美江（香川大学）
桑原　宏一（練馬区立豊玉中学校）	小林　　博（元調布市立第三中学校）
近藤　和夫（元大田区立大森第十中学校）	斎藤　圭祐（東京都教育庁指導部）
須藤　哲夫（元品川区立伊藤中学校）	関　富美雄（渋谷区立上原中学校）
高村　真彦（板橋区立高島第二中学校）	高山　琢磨（町田市立町田第一中学校）
塚本　桂子（世田谷区烏山中学校）	半田　　進（東北福祉大学）
稗田　浩士（足立区立第十二中学校）	堀　　孝浩（練馬区立開進第一中学校）
山本　恵悟（足立区立千寿青葉中学校）	吉田　直樹（元中野区立中野中学校）
吉田　裕行（世田谷区立砧中学校）	