

「変化の割合」の指導について

東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会

	ページ
1. 研究の経過とねらい -----	1
2. 研究内容	
(1) 第2学年「変化の割合」の指導について -----	2
(2) 第3学年指導計画と指導内容の作成の視点 -----	2～ 3
(3) 第3学年第5時「変化の割合」の授業の留意点について -----	3
(4) 第3学年指導計画 -----	4～ 5
(5) 第5時の指導 -----	6～19
3. 今後の課題 -----	20

1. 研究の経過とねらい

本委員会では、平成12年度まで、中学校関数指導について具体的・実践的な指導計画や指導案を作成し、授業を通して実証的に検討を行ってきた。また、各学年における評価の観点と評価問題の作成、実施、検討も行った。

平成9年度⁽¹⁾は、関数カリキュラムについての提言、改善の内容に対応した関数指導の評価規準の検討と改訂、指導内容の検討と指導計画の改訂を行った。平成10～12年度⁽²⁾は、改善の重点である第1学年における関数のよさに気づかせるための「さまざまな関数」の指導、そして各学年におけるグラフを利用するよさに気づかせるための「グラフのよみ」の指導について、授業研究を通して検討、考察を行った。

以上の研究の経過を経て関数カリキュラムを検討していく中で、評価問題の実施結果から「変化の割合」の理解が弱いことが明らかになった。

そこで、平成13～14年度⁽³⁾は、「変化の割合」の意味を理解させることや、その概念を育成することをねらいとして、第2学年の1次関数を中心に指導内容の研究を行った。今年度は、第2学年での指導をふまえて、第3学年の指導計画の再検討をすることにした。

2. 研究内容

(1) 第2学年「変化の割合」の指導について（平成13・14年度発表より）

これまでは「変化の割合」の定義を含め、「変化の割合」の指導を、1次関数の定義の指導直後に行うのが普通であった。この指導では、「変化の割合」の意味の理解が不十分なままグラフの指導に入るため、「変化の割合」「グラフの傾き」「 $y = ax + b$ のaの意味」がばらばらの知識となって、それぞれが一体化した理解にまで至らない生徒が多くいた。

そこで、「変化の割合」の概念や意味を理解させることをねらいとして、次のような視点で指導内容と指導計画の再検討を行った。

- ア. 離散量と連続量の2つの課題を扱う。
- イ. 具体的な事象を通して、変化のようすを調べ、「変化の割合」の意味を理解させる。単に形式的な「変化の割合」を求めるだけの指導は行わない。
- ウ. 「変化の割合」の定義の指導は、その意味を理解する学習の後で行う。
- エ. 「変化の割合が一定である」ことを丁寧に指導する。
- オ. 「変化の割合が一定な関数のグラフは直線である」ことを丁寧に指導する。

つまり、1次関数の定義の指導後、「変化の割合」の定義を形式的に与えるのではなく、具体的な事象の考察を通して、「変化の割合」の概念や意味を理解させる指導を丁寧に行った。さらに、グラフの指導を行い、「変化の割合」の概念が高められていくなかで、「変化の割合」の定義を行った。

この指導により、「変化の割合」「グラフの傾き」「 $y = ax + b$ のaの意味」が一体化した理解にまで至った生徒が多くなった。

(2) 第3学年指導計画と指導内容の作成の視点

第2学年の「変化の割合」の指導では、どの区間においても「変化の割合」が等しいこと、これが「 $y = ax + b$ のaの値と等しいこと」を理解させてきた。第3学年においては、「 $y = ax^2$ のa」と「 $y = ax + b$ のa」と混同している生徒が多く見られた。また、関数 $y = ax^2$ において、「変化の割合」はグラフ上ではどんな意味であるかまでの理解は深められていない生徒が多く見られた。

そこで、第3学年においても、具体的な事象の考察を通して、関数 $y = ax^2$ における「変化の割合」の概念や意味の理解を深めさせることをねらいとして、指導内容と指導計

面の再検討を行った。

その結果、第3学年での指導の流れを、第2学年と同じように2次関数の定義、「変化の割合」の素地的な学習、グラフ、「変化の割合」の定義の順で指導を行うことにした。しかし、「変化の割合」の素地的な学習は、本委員会の第2学年の変化の割合の指導の成果から、第3学年では省略してもよいという結論に至った。そして、「変化の割合」の意味や定義の理解を深めさせるための指導を、グラフの指導を行った後に位置付けた。指導計画第5時がその指導である。第5時の指導を、次の視点で作成した。

- ア. 「変化の割合」を求めるときに、そのよさや必要性がわかる、より適切なで具体的な事象の課題を扱う。
- イ. 具体的な事象を通して、変化のようすを調べ、さまざまな区間の「変化の割合」を求めるような指導の工夫を行う。第2学年で学習した「変化の割合」の意味や求め方を振り返らせる場面を作る。
- ウ. 「変化の割合」の指導の具体例として、「平均の速さ」の考えを扱う。これまでの速さの概念から平均の速さの概念へと高まる学習内容が必要である。そのために「平均」の意味が理解できるよう、丁寧に扱う。
- エ. 関数 $y = ax^2$ の「変化の割合」を指導する際に、関数 $y = ax^2$ だけを取り上げるのではなく、1次関数と比較し、既習の学習内容との関連性を実感させる。

(3) 第3学年第5時「変化の割合」の授業の留意点について

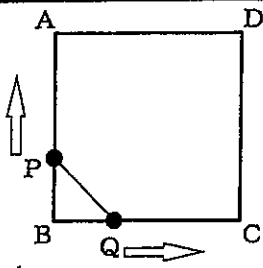
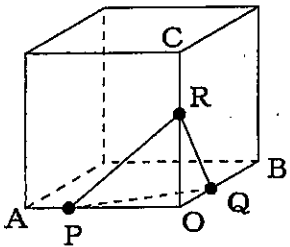
「変化の割合」の具体的な事象として、平均の速さを扱う場面を考えた。課題として、日常生活の場面であること、変化の割合が実感できること、変化の割合が一定であるものと比較できるものとして、指導案にあるような自転車の課題を考えた。

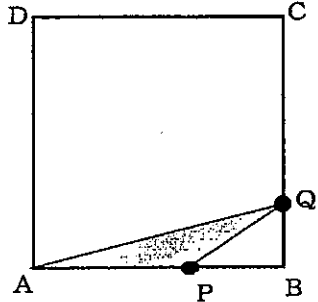
工夫した点として

- ・ グラフは連続したものでなく、一部の点のみを表した。
- ・ 課題のグラフは、一見すると放物線のように見えるが、放物線と直線をあわせたグラフである。
- ・ 変化の割合の必要性を実感させるために、各区間の変化の割合の違いを丁寧に扱った。
- ・ 平均の速さを段階を追って指導し、定義した。
- ・ 指導案を作成するにあたり、課題場面とその発問の検証授業を行った。指導案の生徒の反応は、その授業で出てきたものである。

がある。

(4) 第3学年指導計画

時数	項目	学習内容
1	2次関数	<p>[課題場面] 1辺が8cmの正方形ABCDがある。点Pは頂点BからAを通過して点Dまで、点Qは頂点BからCを通過して頂点Dまで同時に出発し、それぞれ1秒間に2cmの速さで動く。</p> <p>①何がかわるかを考える。 ②時間と面積(△PBQ, 五角形PQABC)との関係を調べる。 表で1次関数とは違う変化の関数であることを確認する。 式: $0 \leq x \leq 4$ のとき $y = 2x^2$ $4 \leq x \leq 8$ のとき $y = -2x^2 + 32x - 64$</p>
		
2		<p>①2次関数の定義 ②具体的な例(立方体の表面積、高さ一定の正四角すいの体積)について立式する。 ③$y = x^2$のグラフがどんな形になるか予想する。</p>
3	関数 $y = ax^2$ のグラフ	<p>①$y = x^2$のグラフを完成させる。 ②$y = 2x^2$のグラフをかき、$y = x^2$のグラフと比べる。 ③$y = x^2$のグラフをもとに、$y = 1/2x^2$のグラフをかく。</p>
4		<p>①$y = -x^2$のグラフをかき、$y = x^2$のグラフと比べる。 ②$y = -x^2$のグラフをもとに、$y = -2x^2$のグラフをかく。 ③$y = -x^2$のグラフをもとに、$y = -1/2x^2$のグラフをかく。 ④関数$y = ax^2$のグラフの特徴を、1次関数との比較、増減の話などを含めてまとめる。</p>
5	変化の割合	(5) 第5時 指導案 参照
6		<p>①$y = -x^2$について、変化の割合を調べる。 ②変化の割合の意味をグラフ上で確認する。 ③関数$y = ax^2$の値の変化の割合についてまとめる。 ④具体的な場面(落体運動)で、変化の割合の意味について考える。</p>
7		人と三輪車が同時に坂道を下りるときの時間と距離の関係を表すグラフをよみとり、問題を解決する。(等速運動と等加速運動)
8	練習問題	
9	いろいろな関数	<p>[課題場面] 右の図のような1辺が10cmの立方体がある。点P、Q、Rはそれぞれ辺OA、OB、OC上の点である。</p> <p>①次のそれぞれの条件についてxとyとの関係を調べる。 (i) 点Q、RはOQ=4cm、OR=6cmの位置に停止し、点Pは頂点Oを出発してからx秒後の三角すいR-POQの体積を$y \text{ cm}^3$とする。(y=4x)</p>
		

		<p>(ii) 点RはOR=6 cmの位置に停止し、点P、Qは頂点Oを同時に出発し、それぞれ毎秒1 cmの速さでA、Bまで動く。点P、QがOを出発してからx秒後の三角すいR-POQの体積を$y \text{ cm}^3$とする。 ($y = x^2$)</p> <p>(iii) 点P、Q、Rは頂点Oを同時に出発し、それぞれ毎秒1 cmの速さでA、B、Cまで動く。点P、Q、RがOを出発してからx秒後の三角すいR-POQの体積を$y \text{ cm}^3$とする。 ($y = 1/6 x^3$)</p> <p>② $y = 4x$、$y = x^2$、$y = 1/6 x^3$の値の変化を表で調べる。</p>
10		<p>(iv) 前時の課題場面で、1点RはOR=6 cmに停止しており、1点Pは毎秒1 cmの速さでAまで動く。そのとき点Qは三角すいR-POQの体積が6 cm^3で一定になるように動く。点PがOを出発してからx秒後のOQの長さをy cmとする。xとyとの関係調べる。 ($y = 6/x$)</p> <p>③ $y = 6/x$ について、変化や対応のようすを調べる。</p> <p>④ $y = 4x$、$y = x^2$、$y = 1/6 x^3$、$y = 6/x$のグラフについて調べる。</p>
11	グラフのよみ	<p>【課題】ある電話会社3社の料金は次のようになっている。 A社：30秒ごとに20円加算される B社：16秒ごとに12円加算される C社：7秒ごとに5円加算される</p> <p>(1) どの会社の料金が一番安いかを考える。 (2) 通話時間と料金の関係のグラフを考え、さらによみとる。 (3) グラフを利用して、どの会社が得であるかを考える。</p>
12		<p>①前時の課題において、次の問題を解決する。 【問題1】最初の20秒間は30円だが、その後は20秒毎に8円加算されるD社が他の会社より安くなる時間を求める。 【問題2】ある3家が違うかけ方で、1日に合計400秒話したときの料金の比較を行う。</p> <p>②第11時の課題を通して、対応の特徴から関数の定義をし、関数の例を見つける。</p> <p>③関数にならない例について考える。</p>
13	関数の利用	<p>【課題場面】右の図のように、1辺が30 cmの正方形ABCDがある。点PはAを出発して毎秒5 cmの速さでBを通りCまで動く。点QはBを出発して毎秒2 cmの速さでCまで動く。</p>  <p>①△APQの面積がどのように変化しているか、気づくことをあげる。 (i) △APQの面積が最大になるのは何秒後かを考える。 (ii) △APQの面積が45 cm^2になるのは何回あるかを考える。 (iii) △APQの面積が125 cm^2になるのは何秒後かを考える。</p> <p>②グラフを利用することのよさを実感する。 ③いろいろな関数があることを知る。</p>
14	問題練習	問題練習(グラフを通してxの変域からyの変域を求める問題を含む) レポート(関数の具体例を探し、考察する課題)の説明
15	発表会	レポートの発表・討論、相互評価

(5) 第5時の指導

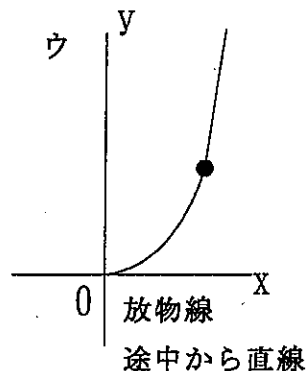
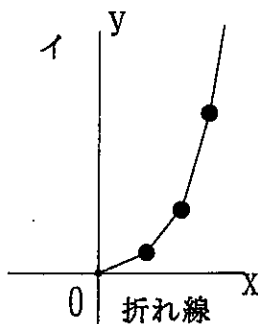
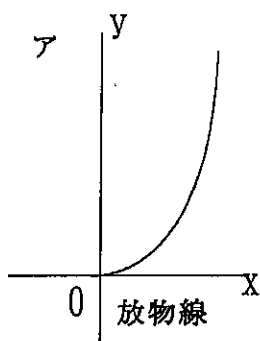
以上の経過を経て、次のように研究授業を行った。

- ① 第3学年指導計画 (p. 4～5) の流れの中で実施・・・平成15年1月9, 10日
- ② 第3学年選択授業において単発的に実施・・・平成15年7月14日

① 平成15年1月10日 中野区立第七中学校 (3クラスで実施)

i) 指導の概要 (課題場面はp. 11 参照)

- 1) 自転車をこぐときの様子を自由に考えさせる。
- 2) 課題を提示して、自転車をこぐとき時間にもよって距離がどのように変化しているかを考える。
 - ア. 増える イ. だんだん増えていく
- 3) グラフ (点の集まり) がどのようになっているかを各自予想させる。



- 4) 時間にもよって距離はどのように増えていますか。
- 5) グラフは放物線ですか。それとも途中から直線になっていますか。
- 6) いろいろな区間で変化の割合を求める。
 - ※変化の割合を忘れていた生徒には、意味・定義を説明
- 7) 変化の割合をさまざまな区間で求め、気づいたことをかく。
- 8) $x=0$ までは変化の割合が増え、 $x=0$ からは一定であることを確認する。
- 9) 変化の割合が何を意味しているかを考える。
 - ア. 速さ
 - イ. 速さが一定
 - ウ. 速さが加速
 - エ. 途中までは一定、途中から加速
- 10) $x=0$ までは加速して、それ以降は一定の速さになっていることを確認する。
- 11) y を x の式で表す。
- 12) $x=0$ までは2次関数、 $x=0$ からは1次関数であることを確認する。

ii) 生徒の主な反応

2) 自転車をこいでいくとき、時間にもなって何が変化しますか。

- ア. 速さ
- イ. 距離
- ウ. こげばこぐほど速くなる。

3) 点の集まりはどのようになるか予想してください。

- ア. 曲線になっている。
- イ. 最初は曲線で途中から直線に変わる。
- ウ. 放物線になっている。
- エ. 5秒までは放物線でだんだん速くなっていくグラフで、5秒から速さの変わらない直線のグラフになる。
- オ. はじめ速さは増加していくがある速さで一定になる。
- カ. x が5以上になると一定の割合で増える。

4) 時間にもなって距離はどのように増えていますか。

- ア. 距離の増え方が大きくなっていく。
- イ. 途中までは速くなっていったその後は一定に増えていく。
- ウ. 1秒ごとに増え方が大きくなっている。
- エ. 5以下の時 $y = 1/5 x^2$ 、5以下の時 $y = 2x - 5$
- オ. 距離は時間の2乗に比例する。
- カ. 増えれば増える関係になるが、比例はしない。しかし、途中から一定になっているため比例の関係にある。
- キ. 最初は加速して、途中から一定のスピードで進んでいる。

5) グラフは放物線ですか。それとも途中から直線になっていますか。

- ア. 途中まで放物線で途中から直線になる。
- イ. 途中から直線になっている。なぜなら、表より5秒のところから変化の割合が等しくなっている。
- ウ. 5秒までは放物線（グラフより1秒に進む距離が増えている） 5秒からは直線（グラフより1秒間に2mずつ増えている）
- エ. 途中から直線になっている。（自転車は進み出したときはどんどんスピードが上がるが、しばらくするとスピードは一定となるから）
- オ. 途中から直線になっている。（途中から傾きが一定になっている）
- カ. 途中から直線になっている。（仮に放物線ならば $y = 1/5 x^2$ という式になるが、 x に6を代入すると $y = 36/5$ となり、 $y = 7$ にはならない）

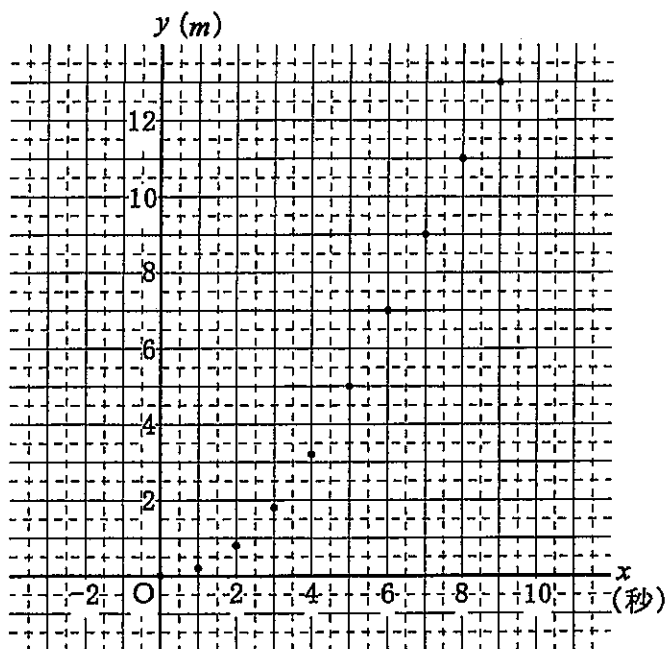
11) y を x の式で表しなさい。

- ア. $0 \leq x \leq 5$ のとき $y = 1/5 x^2$ 、 $5 \leq x$ のとき $y = 2x - 5$
- イ. $y = 2x - 5$

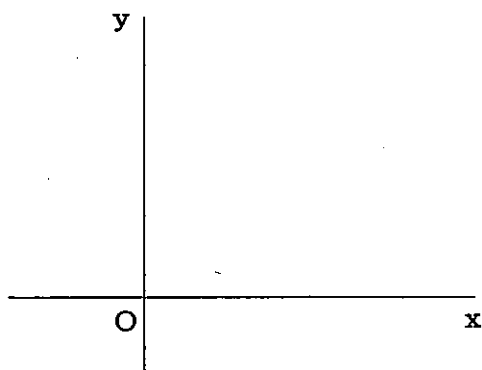
iii) 研究協議

- ・グラフをかかせたところ、放物線にした生徒と、途中から直線にした生徒が両方いた。予想としては、放物線だけの形だと判断する生徒が多いと考えていたが、5秒を境にして直線であることに気付く生徒も多くいた。それならば、5秒を境にしてどのような違いがあるかを生徒に発問してもよいのではないか。
- ・グラフを予想させたが、グラフの概形をかかせることによって、よい点と悪い点があるように思えた。もっと自由にグラフに縛られず、いろいろな考えを出させるのも一つの方法である。
- ・「グラフは放物線ですか。それとも途中から直線になっていますか」と発問した。しかし、その前から多くの生徒は途中から直線になっていることに気付いていた。第2学年での指導の成果がここに現れているようである。
- ・第3学年としての学習を深めるためには、「平均の速さ」の意味をクローズアップするところまで高められるであろうと考える。
例えば、 x の増加量が等しいが異なるいくつかの区間での速さを計算させてみてはどうか。それによって生徒がどのようなことに気付くのかを投げかけてみることも必要である。
- ・第3学年の学習として大切なことは、区間を決めてそれに対する速さを調べることで「一定の速さとの違いを考えていくことである。この授業では式を求めさせることにも重点を置いているが、それよりも平均の速さから変化の割合への橋渡しをすることに重点を置きたい。

下の点は、A君が自転車がある地点からこぎ始めたときからの時間と進んだ距離について調べたものである。



① 点の集まり (グラフ) は、どのようになるか予想してください。

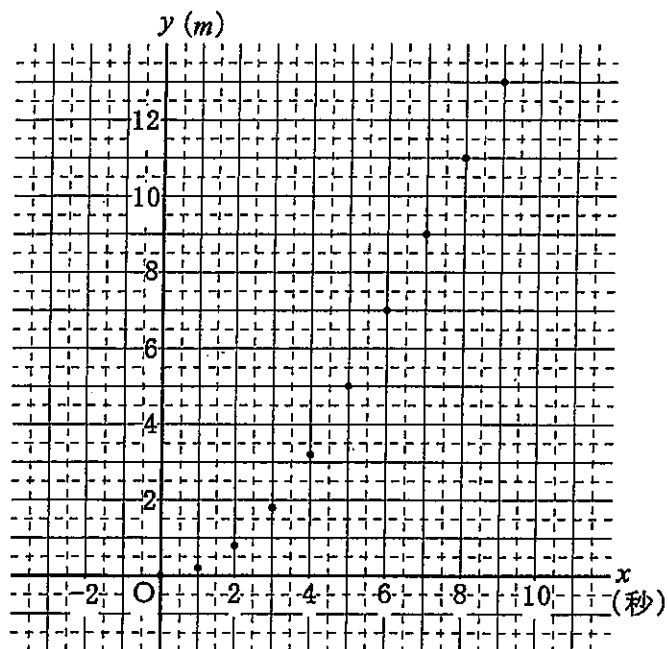


文章で

② 時間とともに距離はどのように増えていますか (理由が分かればそれもかく)

※ ①, ②が終わった後に生徒に配布する。

() 組 () 番 氏名



③ グラフは放物線ですか。それとも途中から直線になっていますか。その理由を説明しなさい。

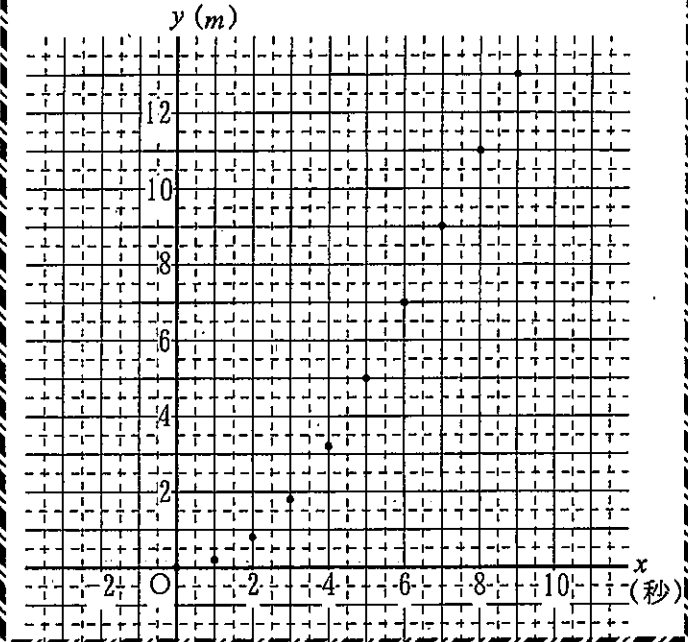
④ y を x の式で表しなさい。

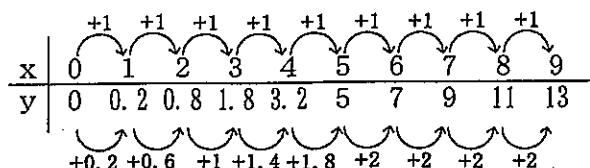
② 平成15年7月14日 目黒区立東山中学校での実施

1) 指導案

本時のねらい

- ・ 自転車をこぎ始めたときからの時間と距離の関係について調べ、変化の割合の必要性やよさを理解する。
- ・ 変化の割合の意味を理解する。

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
	<p>課題場面</p> <p>下の点は、A君が自転車のある地点からこぎ始めたときからの時間と進んだ距離について調べたものである。</p>  <p>(1) これを見て、わかることをあげなさい。</p> <p>① グラフの形状に着目した生徒</p> <p>ア 曲線になっている。</p> <p>イ 放物線になっていると思う。</p> <p>ウ $y = ax^2$ のグラフになっている。</p> <p>エ 途中から直線になっている。</p> <p>② 量的なものに着目した生徒</p> <p>ア xが増えると yも増える。</p> <p>イ 1秒間に動く距離が増えている。</p> <p>③ 変域に着目し、分類している生徒</p> <p>ア 5秒後から進む距離が一定である。</p> <p>イ 5秒からは速さが変わらないグラフである。</p> <p>(2) はじめの5秒とそれ以降とでは、何が違いますか。</p> <p>ア 5秒までは1秒あたりの間隔がどんどん増える。</p> <p>イ 5秒から1秒あたり2mずつ一定に進む。</p> <p>ウ 5秒からは直線になっている。</p> <p>(3) グラフを読みとりながら、表を完成させ、変化のようすを確認する。</p>	<p>ワークシートを配る。</p> <p>1 (3) の生徒の意見を取り上げる。</p>



グラフを教師と生徒で確認しながら、値を与える。

課題1

この課題場面において、次の①～④の区間のうち、どの区間が速いですか。また、その理由も考えましょう。

- ① 1秒から3秒の間 ② 3秒から5秒の間
 ③ 5秒から7秒の間 ④ 7秒から9秒の間

(4) それぞれの区間の速さを求める。

- ① $(1.8 - 0.2) / (3 - 1) = 0.8$
 ② $(5 - 1.8) / (5 - 3) = 1.6$
 ③ $(9 - 5) / (7 - 5) = 2$
 ④ $(13 - 9) / (9 - 7) = 2$

ア グラフから、2点を結びその傾きで判断する。

イ いずれも同じ時間なので、表を見て進んだ距離から判断する。

平均の速さを定義する。

ある区間の中では、どのように変化をしているかにかかわらず、その区間でのかかった時間と進んだ距離で、下のようにして求めるものを平均の速さとする。

$$\text{平均の速さ} = \frac{\text{進む距離}}{\text{かかった時間}}$$

課題2

この課題場面において、次の①～③の区間の平均の速さを求めましょう。

- ① 0秒から3秒の間 ② 2秒から5秒の間
 ③ 0秒から5秒の間

(5) 平均の速さを求める。

- ① $(1.8 - 0) / (3 - 0) = 0.6$ $\frac{0.6 \text{ m}}{\text{秒}}$
 ② $(5 - 0.8) / (5 - 2) = 1.4$ $\frac{1.4 \text{ m}}{\text{秒}}$
 ③ $(5 - 0) / (5 - 0) = 1$ $\frac{1 \text{ m}}{\text{秒}}$

ある時間からある時間までの平均の速さは、その

$\frac{\text{進んだ距離 (yの増加量)}}{\text{かかった時間 (xの増加量)}}$ であることを確認する。

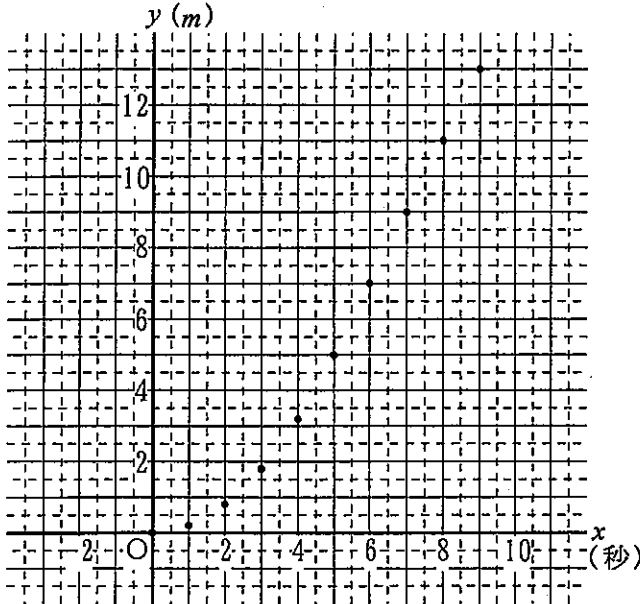
さらにそれが、その区間の変化の割合であることを確認する。

0～1秒は0.2m/秒、1～2秒は0.6m/秒・・・のように考える生徒には、0～5秒トータルとして考えるように伝える。

この値が一定ではないことを、一次関数との比較をしながら確認する

ii) 授業記録

日 時 平成15年7月14日(月) 第3校時(10:45~11:35)
 対 象 目黒区立東山中学校 3年選択(受講者数 6名)
 授業者 目黒区立東山中学校 教諭 齋藤 圭祐

指導内容と教師の働きかけ	生徒の活動と反応
<p>T:今日は、自転車をこぐという場面について、時間や距離などがどのように変わっていくかを考えてみましょう。 (プリントを配布。課題場면을提示する)</p>	<p>S (課題場面を読む)</p>
<p>課題場面</p> <p>下の点は、A君が自転車のある地点からこぎ始めたときの時間を距離について調べたものである。(ワークシート配布)</p> 	
<p>T:これを見てどんなことが分かるかな? できるだけ多く書いてみましょう。</p> <p>T:そうです。それではお願いします。</p> <p>T:それでは、発表してみましょう。</p> <p>T:付け加えや、賛成・反対意見はありますか。</p> <p>T:5秒からは、2mずつ進むんだ。もう一声?</p> <p>T:他にはあるかな。</p> <p>T:速さが上がるというのを、一般的に言う</p>	<p>S1:このグラフを見てですか?</p> <p>S (約4分、考える)</p> <p>S2:5秒経ってから2mずつ進んでいる。</p> <p>S3:速度が変わらないと思う。5秒経ってから。</p> <p>S4:毎秒2mずつ進む。</p> <p>S5:速さが上がれば移動距離が長くなる。</p> <p>S6:速さが速くなる。</p>

と？
 T：ということは、5秒後は変化がないのかな？
 T：なるほど、そうだね。
 ところで、このグラフは実際の場面ではどのようになっているのかな？
 T：他にはないかな？
 T：ところで、これは5秒経ってからは速度は変わらない。5秒までは速さが変化するんだっただね。速さが変化する、速くなるというのは具体的に言うと？

S7：5秒までは速さの変化があると思う。
 S7：ないと思う。
 S8：急ブレーキとかすれば・・・
 S9：最初はいでいるからういーんと速くなって行って、途中からこくのを止めて、すーっというている。
 S10：加速している。

【生徒の反応（ワークシートより）】

- (S1)・少しづつ加速している。
 - ・5秒の地点からは一定の速度をたもっている。
- (S2)・段々加速しはやくなっている。
 - ・5秒から速さがかわんない。
 - ・最大値は毎秒2mで、最小値は0をぬかせば約0.2m/秒と、1.8m/秒もちがう。
- (S3)・だんだん変化の量が大きくなって、xが5以降は一定になる。
 （だんだん速度が速くなって、5秒以降は一定の速度になっている）
 - ・最も速いときは1秒間で2m進む。
- (S4)・5mくらいまでは速くなっていくけど、その後はほぼ同じ速さ。
- (S5)・1秒上がっていくごとに、距離が上がっていく。
 - ・5秒たってから2mずつ進んでいる。
 - ・速さがあがれば移動が上がる。
- (S6)・速さが途中まで上がってそれから同じ（5秒まで）
 - ・速さがあがれば移動距離も長くなる。
 - ・5秒からは1秒で2mずつ進んでいる。

T：みんなは『5秒』というところで何かが変わっているんだろうということに気付いているようだね。では、はじめの5秒と次の5秒、まあこのグラフでは5秒は書いてないんだけど、その先は続くと思って考えてもらうことにして・・・何がどのように違いますか。先ほど、速度が5秒までは変わる、5秒からは変わらないとあったけれど、それ以外にもあったら考えてみて下さい。」

S（約5分間考える時間を与える）

T：それでは、発表してみてください」

S11：はじめの5秒では5mで、後の5秒が10m進んでいる。

T : 後の5秒が10m進んでいると、分かりますか？

S12 : 2m/秒で進んでいるから、10m。

T : 同じ5秒なのに、明らかに違いますね。そうですね。他にはありますか。

S13 : 速さが違う。

T : どう違うか分かりますか。

S14 : 後ろの5秒は2m/秒で、前の5秒は平均でもしない限りわからない。

S15 : 5秒で5mなんだから、1m/秒じゃないの？

S14 : 加速しているんだから、違う。

S16 : 速度が違うから、一定じゃない。

T : 何で速度が違うってわかるのかな？

S17 : 1秒ごとの間隔が違う。

【生徒の反応 (ワークシートより)】

(S1) ・移動距離 (はじめの5秒は5m、後の5秒は10m)

・速度 (5秒までは変化有り、5秒後は2m/秒)

・消費カロリー ・車輪の回転数

(S2) ・はじめの5秒と次の5秒、進んだ距離が違う。

・速さが違う。5秒までは不明。不規則。後は2m/秒で規則的。

・いる位置が違う。

(S3) ・速さははじめの5秒はだんだん加速し、次の5秒は加速し終わり、一定の速度 (2m/秒 (7.2km/h))

・はじめの5秒で進む距離は5mで、次の5秒で進む距離は10m。

・はじめの5秒は平均で1m/秒 (3.6km/h)

・次の5秒は2m/秒 (7.2km/h)

(S4) ・進む距離 (5秒までは短い。5秒からは長い)

・5秒までは速さが不規則、5秒からは2m/秒

・0~5秒は5m、5~10は10m

(S5) ・最初の5秒は速さが急激に速くなり、次の5秒は一定の速さになっている。

(S6) ・5秒までは速さが上がり、5秒からは一定の速度。

・5秒からは上がりが直線になっている。

・5秒までは曲がっている。

T : そうですか。それではみんなで確認してみましよう。グラフだと値がはっきりしないので、これを1秒ごとで表で表してみましようか。

S18 : 0

ではいきましよう。xが0のときは？

T : では、x=1のときはどうかな？

S19 : 0.2くらい

T : それじゃ、0.2として考えましよう。

(以下、生徒とともに、以下の表を完成した)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0.2	0.8	1.8	3.2	5	7	9	11	13

T: では、1秒ごとの速さを求めてみましょう。

S20: 0~1は、1秒で0.2m。
0.2m/秒
1~2は、1秒で0.6m。
0.6m/秒
2~3は、1秒で 1m。
1m/秒

S21: もうわかった。やってみる。

T: では、各自でやってみて下さい。

		+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0.2	0.8	1.8	3.2	5	7	9	11	13
		+0.2	+0.6	+1	+1.4	+1.8	+2	+2	+2	+2
		0.2	0.6	1	1.4	1.8	2	2	2	2

(速さ m/秒)

T: ん、何が?

S22: 何か、規則っぽい。

S22: 5秒からはずっと2だけれど、5秒までは0.4ずつ大きくなっている

T: ああ、なるほど。確かにそうだね。では、この場面で今から4つ区間を言うので、一番早いのはどれでしょうか? 1番、1秒から3秒まで。

S23: あ、もうわかった。4番だ。

T: いやいや、わかんないよ。

S24: だって、だんだん速くなるに決まっているじゃん。

T: まあまあ、最後まで。2番、3秒から5秒まで。3番、5秒から7秒まで。4番、7秒から9秒まで。では、そう答えた理由もしっかり書いて下さい。

S25: 基本的には、7秒から9秒までだよな。

S26: 一つだけ?

T: それも含めて考えてみましょう。

S27: 1番とか、絶対違うって。あり得ない。S (約4分間、考える)

T: じゃ、考えてみましょう。

S28: 1番速いのは③と④。理由は、①~④まで全部移動する時間が同じだから、1秒間に進む距離が最も長いものが1番速いから。

T: では、発表して下さい。

T: みんな時間が同じだから、その中で一番進む距離が長いものを選んだんだね。それじゃ、それぞれ何m進んでいるのかな。

S29: ①は1.6m ②は3.2m ③は4m ④は4m

T: それは、何から判断できたかな。

S29: さっき作った表を見てわかった。

T: 表を見ないで分かったという人はいますか?

S30: こぎ始めは遅い。最初は遅くて、だんだん速くなるから。

S31: でも、③と④は変わらない。最高速に

T : ああ、なるほど。グラフを見て分かったという人はいませんか？

T : それはどういうこと？

T : そうだね。それが進む距離になっているからね。

なったからもう変わらない。

S32 : グラフを見て判断したんじゃないけど、グラフを見ると点と点の間の縦の間隔が大きくなっている。

S32 : 間隔が大きいほど進む距離が長い。だから同じ時間だったら間隔が大きいと速さが速い。③と④のところは同じ間隔で直線だから、速さは同じ。

【生徒の反応（ワークシートより）】

(S1) 1番速いのは③と④

理由・・・①～④まで全部移動する時間が同じだから、1秒間に進む距離が最も長いものが1番速いから。

(S2) ③と④

理由・・・グラフと数字を見ただけだと、進む距離が一番大きいのが③と④とわかるから。

(S3) ③と④

理由・・・2秒間に進む距離が一番大きいから。

(S4) ③と④

理由・・・こぎはじめは遅いから。

(S5) ③と④

理由・・・1秒で毎秒2mだから。

(S6) ③と④

理由・・・①は1.6m ②は3.2m ③は4m ④は4m
グラフを見て分かった。同じ2秒で進む距離を見た。

T : ところでさっき、5秒までの速さを『平均でもしない限りわからない』と言っていた人がいたよね。

速さは $\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$ で求められるんだけど、ここではそれを使ってはいけないんだよね。

T : そうだね。そこで、これから「平均の速さ」を定義します。実はこの間はこういう風に変化しているかにはかかわらず、平均したらこういう速さなんだよという

ことを $\frac{\text{進む距離}}{\text{かかった時間}}$ とします。

T : それでは、以下の①～③の区間の平均の

S33 : だって、前と後ろのあたりでは速さが違うから。

(約2分間考える時間を与える)

速さを求めましょう

- ① 0秒から3秒の間
- ② 3秒から5秒の間
- ③ 2秒から5秒の間

$$S34: \textcircled{1} \frac{1.8-0}{3-0} = 0.6 \quad 0.6 \text{ m/秒}$$

$$S35: \textcircled{2} \frac{5-1.8}{5-3} = 1.6 \quad 1.6 \text{ m/秒}$$

$$S36: \textcircled{3} \frac{5-0.8}{5-2} = 1.4 \quad 1.4 \text{ m/秒}$$

T: これらの式は、どこかで見たことありませんか。

T: ③でいうと、xが2から5まで増加する間、yは0.8から5まで増加しているね。つまりxの増加量とyの増加量は？

T: つまり、ここで求めたものは？

T: そうですね。ここで求めた平均の速さは、変化の割合になっているね。

S37: xは3、yは4.2

S37: $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ だから、変化の割合。

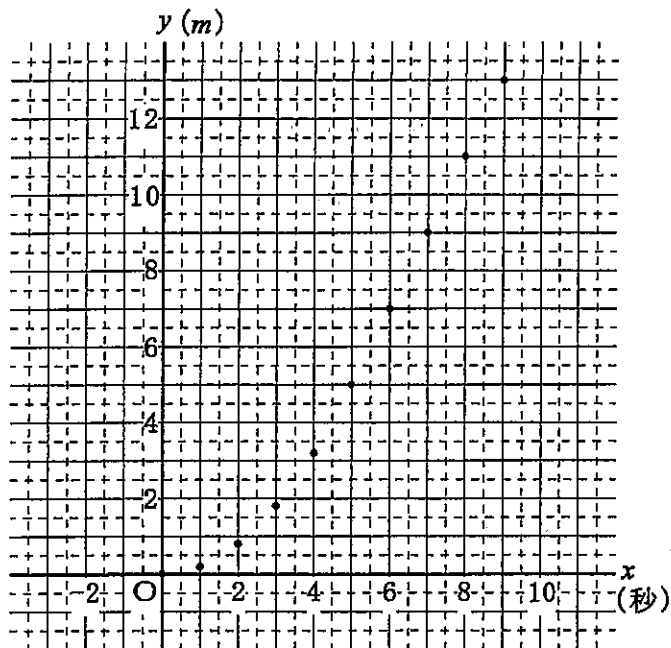
iii) 考察

- 選択の6人でこれだけの意見が出たのだから、通常の授業ではもっと多くの意見が出るのではないか。
- 今回の対象は、これまでの関数委員会の指導計画通りには授業をしていないクラスであった。しかも、第3学年の関数については未習である。そのため、放物線について理解していないため、グラフ的な考察が少なかった。指導計画のように、グラフの指導を行った後であれば、もっとグラフに対する読みの反応が強かったのではないか。
- S1.4の「・・・前の5秒は平均でもしない限りわからない」と述べているが、よく平均という言葉が出てきた。第3学年の変化の割合の指導は、その視点が重要で、1次関数の変化の割合よりもより高い「平均変化率」の前段階としての学習段階を作ることである。その点では、無理矢理にそのような視点を与えたのではなく、自然な生徒の反応からたどり着くことができた。第5時としては適切な課題であった。
- 速さ=距離/時間としたが、速さ=道のり/時間のほうがよいのではないか。
- 区間の平均の速さを求めさせ、xの増加量とyの増加量に着目させたこともあり、S37で「変化の割合」という言葉を生徒から導き出すことができた。
- 教師の発問が、大切である。

iv) ワークシート

() 組 () 番 氏名

下の点は、A君が自転車がある地点からこぎ始めたときからの時間と進んだ距離について調べたものである。



① これを見て、どんなことが分かりますか。

※①以外の発問は、プリントには掲載していない。

3. 今後の課題

本委員会は、一人ひとりの生徒の関数概念の理解が、どのように高まり深まるかを、授業実践を通して考察してきた。具体的には、授業の中で、さまざまな学習内容をどのように指導すれば、生徒の関数概念が高まるかについて、実証的に検討している。

今後、次の点について研究を進めていこうと考えている。

- (1) 3年間を見通した関数カリキュラムを検討し、指導計画を作成したが、その指導計画や指導案を、授業研究を通して実証的に検討する。また、小学校や高等学校との関連を見直す。
- (2) 第3学年の「変化の割合」の指導について検討を続け、指導のあり方、適切な課題を検討していく。
- (3) 評価問題を実施、考察し、指導計画、指導案、評価規準について見直していく。
- (4) 各学年において、「数学的な見方や考え方」「関心・意欲・態度」を一層伸ばすような課題を設定した授業を行い、指導のあり方や適切な課題について検討していく。
- (5) 関数の領域以外や他教科において、関数的な考え方を伸ばすのにふさわしい指導場面について検討していく。そして、それらとの関連を明らかにし、より適切な関数指導を追求する。

以下の文献は、東京都中学校数学研究会 関数委員会の作成したものである。

- (1) 「中学校関数カリキュラムについて」
〈日数教（群馬）大会発表資料〉1997（H9）
- (2) 「中学校関数カリキュラムについて」
〈日数教（山口）大会発表資料〉1998（H10）
「中学校関数指導について」
〈日数教（秋田）大会発表資料〉1999（H11）
「中学校関数指導について」
〈日数教（千葉）大会発表資料〉2000（H12）
- (3) 「1次関数における『変化の割合』の指導について」
〈日数教（埼玉）大会発表資料〉2001（H13）
「1次関数における『変化の割合』の指導について」
〈日数教（兵庫）大会発表資料〉2002（H14）

東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会

石井 勉（東京学芸大附小金井中）	井出 宇郎（大田区立大森第六中）
岩木敬二郎（元板橋区立中台中）	遠藤 國雄（元板橋区立向原中）
大澤 弘典（山形大学教育学部）	風間喜美江（江東区立深川第四中）
小林 博（葛飾区立双葉中）	近藤 和夫（稲城市教育委員会）
斎藤 圭祐（目黒区立東山中）	鈴木 大輔（港区立六本木中）
須藤 哲夫（元品川区立伊藤中）	関 富美雄（江戸川区立松江第二中）
高村 真彦（荒川区立第九中）	田中 千穂（葛飾区立本田中）
塚本 桂子（大田区立東調布中）	橋爪 昭男（神津島村立神津中）
半田 進（元弘前大学教育学部）	村田 弘恵（足立区立伊興中）
柳橋 譲（大田区立大森第四中）	山本 恵悟（足立区立蒲原中）
吉田 直樹（中野区立第七中・山梨大大学院）	吉田 裕行（町田市立成瀬台中）