第６１回　東京都中学校数学教育研究発表大会

“型にとらわれない”証明問題の図形指導

東京都中学校数学教育研究会　研究部　図形委員会

1　研究のねらい

本委員会では，昨年度「根拠を明らかにして説明する力を身に付けさせる指導」をテーマに，第２学年「多角形の内角の和」を題材として扱い，調査問題，指導案検討，授業研究を行い，指導の工夫を行ってきた。

今年度は，昨年度の研究を踏まえ，「“型にとらわれない”証明問題の図形指導」をテーマに，研究を進めてきた。第２学年「三角形の合同条件を利用しない論証問題」を題材として扱い，調査問題をもとにワークシートと指導案の作成・検討を行った。この指導案をもとに，研究授業を行い，指導の工夫と改善を狙いとした。

2　研究の内容

（１）題材の検討

今年度，図形委員会で作成した調査問題を実施し，分析・検討を行った。その結果，三角形の合同条件を導く論証問題の正答率は高かったが，合同条件を必要としない論述問題の正答率は低くいことというが分かった。本委員会では，三角形の合同条件を導くための手順が決まっていて形に当てはめれば書ける論証問題を型に当てはまった問題と捉え，それ以外の論証問題を型に当てはまらない問題とした。そこで，三角形の合同条件を導く以外の論証問題も，書けるようになるために，第２学年で授業を行うことを適切であると判断した。今回は，合同条件を用いらない論証問題を扱うことにした。

（２）レディネステスト

生徒からどのような考えが出てくるか傾向をつかむために，レディネステストを実施した。

① 調査時期：令和５年６月

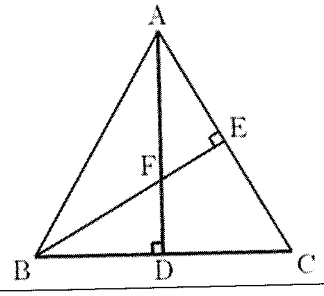
② 調査対象：都内公立中学校１校第３学年３３名

③ 調査時間：30 分

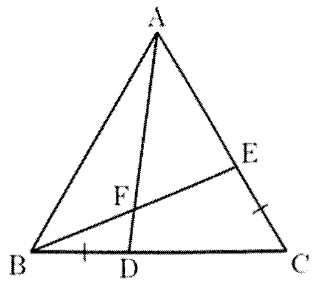
④ 問題と結果

【問題】

（1）　右の図のような正三角形 ABC がある。点 A から辺 BC へ垂線をひき，BC との交点を D とする。また点 B から辺 CA に垂線を引き，CA との交点を E とし，AD と BE の交点を F とする。このとき，∠BFD を求めなさい。



（２）　（１）の問題をみたアキさんは，D, E の位置を BD＝CE の問題をみたすように２点をとり，そのときの∠BFD の大きさを調べるようにした。ただし，点 D は点 B, C と，点 E は点 C, A と重ならないものとする。∠BFD の大きさについて正しく述べていることは次のうちどれですか。
下の（ア）～（ウ）の中から１つ選び，記号で答えなさい。
（ア）∠BFD の大きさは小さくなったり大きくなったりする。
（イ）∠BFD の大きさは変わらない。
（ウ）∠BFD の大きさは問題の条件だけでは決まらない。



（３）　（２）で選んだ理由を証明しなさい。

【結果】
（１）正答　…　28 名（正答率 84.8%）　誤答　…　5 名（誤答例　…30°，105°，120°）
（２）正答　…　16 名（正答率 48.5%）　誤答　… 17 名
（３）
①　完答　…　１名
②　三角形の合同まで証明している　…　６名
③　三角形の合同を示そうとしている　…　１名
④　三角形の合同は示せていないが，その後の角についての言及は正しい　…　１名
⑤　意味不明　…　20 名
⑥　無解答　…　４名

結果を見ると，（１）の問題では，正答率が 80%を超えていた。具体的な正三角形の内角や直角を利用して角を求めることはおおむねできている。しかし，（２）条件を変えたときに，角が変わらないことを選択した生徒は 50 パーセント以下であった。動的に図形を捉え考えることに課題があることがうかがえる。（３）の記述では，33 名中 24 名が意味が捉えられていなく，また無回答であった。根拠を明らかにし，三角形が合同であることをもとに角を考える説明することに大きな課題があると考えた。

（３）研究仮説
レディネステストの結果を踏まえ，図形の学習の中で，求積やなどのドリル的学習には意欲的に取り組める生徒も，証明の論述問題になると，取り組みにくい状況が見られる。そこで，論述に至るまでの流れをレベル別にし，段階を踏んで証明の論述問題に取り組むことで，少しでも証明問題に対し，抵抗を減らせるようにしていきたい。また，証明の論述の前にフローチャートを作成し，証明の筋道を明らかにすることで，証明の筋道を意識するきっかけにしたり，複雑な証明問題の論述をスムーズにかき進めるためのヒントにしたりさせる。

証明の学習　レベル表

レベル１	仮定と定理を使ってわかる情報を図にかきこむことができる
レベル２	証明を“口述”することができる
レベル３	証明の筋道をフローチャートで表すことができる
レベル４（目標）	証明を“論述”することができる

日々の授業から，上記の「証明の学習　レベル表」を黒板に掲示し，意識づけをさせている。

レベル１・・・問題文から仮定と結論を読み取り，問題の状況を整理する。そして，仮定や図形の性質，定理等を使って，わかる情報を図にかきこむことができる。

レベル２・・・結論を示すために，自分自身で証明の筋道を理解し，他者に“口述”することができる。このとき，指示語を使った理解や説明でも良いものとする。

レベル３・・・証明の筋道をフローチャートで表すことができる。このとき，指示語ではなく，式で表すこととし，その根拠も明確にする。

レベル４・・・証明を“論述”することができる。

この指導を継続し，“型にとらわれない”論述指導の実現を目指していくこととした。

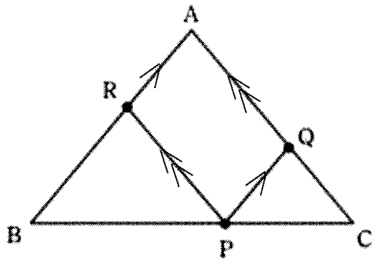
（４）　第２学年　型にとらわれない証明問題の図形指導

ア　本時の目標

- 平行線の性質や二等辺三角形の定理，平行四辺形の定理などを使って複雑な証明問題に取り組むことができる。
- 数学的な見方・考え方を生かして，証明のやり方を説明しようとすることができる。【数学的活動】
- 過不足のないより良い証明を生徒相互で考えていくことができる。

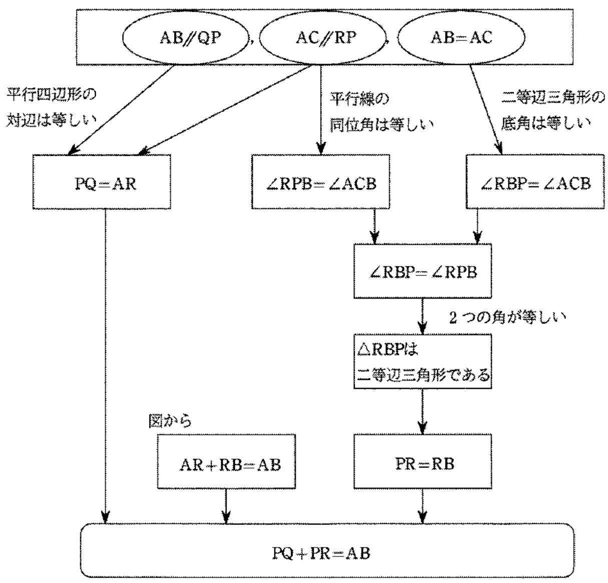
イ　本時の展開

時間	学習内容・学習活動	指導上の留意点	評価規準（評価方法）
導入 ５ 分	・本時の問題を提示する。	・ワークシートＡを配布する。	
	問題　AB=AC の△ABC がある。 点 P は辺 BC 上にある。 点 P を通り，辺 AB，AC にそれぞれ平行な直線をひき，辺 AC，AB との交点をそれぞれ Q，R とする。このとき，PQ+PR=AB となることを証明しなさい。		
	・問題に取り組ませる。（個人活動：２分） S1：図形をかいて見通しを立てようとする。 S2：図形をかいたが，見通しが立てられない。 S3：図形をかくが，正しい図がかけない。 S4：手が全く動かない。（問題文の意味	・図が無いワークシートを配布することで，様々な二等辺三角形に対して自由に点 P をとっても，結論が示せることを実感させる。	

	が理解できていない） T1：今日は今までに学習してきた内容を使って，このような複雑な証明問題に取り組んでいきましょう。		
展開	本時のねらい：いろいろな証明問題のかき方を考えよう		
1 10 分	T2:周りの人がどんな図をかいたか見比べてみましょう。【2分】	・図をかくことができている生徒には，自分と違う図でも結論が正しそうかを確認させる。 ・図を自分でかくことができていなかった生徒には，周りの生徒にかき方を聞きながら，自分で図をかくように指示する。	
	T3:自分のかいた図のかき方が正しいかどうか，先生のかいた図を見ながら確認してください。 ・手順に沿って，図が正しいか確認する。 （1）辺 BC 上に点 P をとる。 （2）点 P を通り，辺 AB に平行な直線をかき，辺 AC との交点を Q とする。 （3）点 P を通り，辺 AC に平行な直線をかき，辺 AB との交点を R とする。	・教師がパワーポイントを用いて問題文の図を確認する。 ・手順が読み取れない生徒は，モニターに二等辺三角形 ABC を映し，問題の手順を投影し，完成する図を確認させる。  ・教師が示した図には PQ に赤色，PR に青色をつけておく。	
	T4：この図の中で，PQ と等しい辺に印をつけましょう。 S5：AR に印をつける。 S6：QC に印をつける。 T5：この図の中で，PR と等しい辺に印をつけましょう。 S7：AQ に印をつける。 S8：RB に印をつける。 T6：黒板の図を参考に，PQ（赤）や PR（青）と等しい長さに同じ色をつけ，理由も考えましょう。	・教師が示す図には色をつけていく。 ・等しい辺である理由を考えさせる。	

	S9: : 仮定から，AR // QP，AQ // RP より，四角形 ARPQ は平行四辺形だから。平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいから。 S10：△QPC が二等辺三角形になりそう。 S11：△RBP が二等辺三角形になりそう。	・平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいことから，PQ=AR，PR=AQ であることを押さえる。 ・△RBP が二等辺三角形になりそうであることを押さえる。 ・PR=RB になりそうなことを押さえる。	
展開2 30分	T11. 今回の証明は複雑な証明になります。証明の方針が立ったら，証明を書いてみましょう。【個人活動 10 分】 S12：根拠を明確にして全ての証明を書くことができる。 S13：平行四辺形 ARPQ の証明と△RBP と△QPC が二等辺三角形であることを証明することができているが，PQ+PR=AB を示すために，AR+RB=AB であることを利用できていない。 S14：平行四辺形 ARPQ であることを証明しており，△RBP と△QPC が二等辺三角形であることの証明ができない。 S15：意味不明 S16：手が動かない	・ワークシート B を配布。 ・5 分経ったら，動き回って周りの生徒の書いているものを見て良いと指示する。 ・見通しが立てられない生徒には簡単にフローチャートを書くように指示をする。 ・教師はフローチャートを書いている生徒のものを写真に撮って，モニターに写しだし，自力で証明を書くことができない生徒には見るように指示する。	平行線の性質や二等辺三角形の定理，平行四辺形の定理などを使って複雑な証明問題に取り組むことができる。 （机間指導・記述内容）

証明の方針を図にしてみましょう。



C：何もかけていない生徒や証明の流れが明確でない生徒には，モニターに映し出されたものをヒントに，３つの要素が必要であることを確認した上で，等しい角を図の中に記入させ，証明に取り組ませる。
B：３つの要素のうち，いくつかの要素が証明できた生徒には，モニターに映し出されたものをヒントに，証明を論述させる。
A：証明をかけた生徒には，自身の証明を振り返らせ，根拠が明らかになっているか，証明の流れが正しいか等を確認させ，より良い証明を論述させる。

T12：一旦席に戻って，証明を完成させましょう。既に証明を書き終わっている生徒は，根拠を明確にして筋道が立った証明になっているかを確認しましょう。また，この後，指名して全体で説明してもらうので，自分の考えを説明できるようにしておきましょう。【3分】 T13：今書けているところまでの証明を Padlet にアップしてください。 ・全体共有【7分】 T14：何人かの人を指名するので，自分が書いた証明を説明してください。この時に，どのようにして証明を組み立てたかも説明してください。 S17：△ABC において， 仮定より，AB//QP… ① AC//RP … ② ①，②より，2組の対辺がそれぞれ平行なので，四角形 ARPQ は平行四辺形である。 よって，平行四辺形の対辺は等しいため PQ=AR … ③ ②より，平行線の同位角は等しいから ∠RPB＝∠ACB … ④ 仮定より，AB＝AC よって，二等辺三角形の底角は等しいから ∠RBP＝∠ACB … ⑤ ④，⑤より ∠RBP＝∠RPB … ⑥ 2つの角が等しいから，△RBP は二等辺	・PQ+PR=AB を証明するためには (1)PQ=AR（平行四辺形 ARPQ） (2)PR=PB（二等辺三角形 RBP） (3)AR+RB=AB の3つの要素が必要であることを教師が押さえた上で，評価を見取る。 ・手が動かない生徒や証明の方針を整理できない生徒には，他の生徒がかいたものを参考にし，かいてみるように声をかける。 ・証明がかけたら，写真を撮って Padlet にアップさせる。 ・完答した生徒がいない場合は，平行四辺形 ARPQ の証明を書く生徒と，二等辺三角形 RBP を書く生徒の2人を指名し，黒板に書かせる。 ・結論の導き出し方は教師が示す。	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>三角形である … ⑦
⑦より，PR＝RB … ⑧
図から，AR＋RB＝AB … ⑨
③，⑧，⑨より PQ＋PR ＝AB</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>まとめ
5
分</td>
<td>T15：複雑な証明をかく上で，どういう手順で考えましたか。
S18：問題文に沿った図形をかいた。
S19：等しい線分の同じ色をつけた。
S20：等しい角に印をつけた。
S21：人の証明を参考にした。
S22：フローチャートを参考にした。
S23：根拠となる事柄を見出した。
S24：等しい辺や角を式に直した。

T16：この証明の流れの中で，普段の証明問題の考え方と同じところと違うところは何ですか。
<同じところ>
・等しい辺や角に印をつけた。
・人の証明を参考にした。
・フローチャートを参考にした。
・根拠となる事柄を見出した。
・等しい辺や角を式に直した。

<違うところ>
・問題文に沿った図形をかいた。
・等しい線分の同じ色をつけた。

T17：これらのことからどんなことがいえますか。
S25：違うところもあるけど，多くの考え方が普段と同じ。
S26：複雑な証明問題も，普段の証明の学習レベルの考え方と同じように考えると良い。

・ワークシート A，B の回収</td>
<td>・本時の振り返りを生徒の言葉をつないでおこなう。

証明の学習 レベル表
<table>
<tr><td>レベル1</td><td>仮定と定理を使ってわかる情報を図にかきこむことができる</td></tr>
<tr><td>レベル2</td><td>証明を“口述”することができる</td></tr>
<tr><td>レベル3</td><td>証明の筋道をフローチャートで表すことができる</td></tr>
<tr><td>レベル4
（目標）</td><td>証明を“論述”することができる</td></tr>
</table></td>
<td>平行線の性質や二等辺三角形の定理，平行四辺形の定理などを使って複雑な証明問題に取り組むことができる。
（ワークシートの記述内容）</td>
</tr>
</table>

いろいろな証明 ワークシートA　　　　月　　日（　）

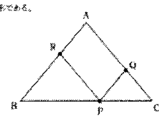
問題 △ABCはAB＝ACの二等辺三角形である。
点Pは辺BC上にある。点Pを通り，辺AB，ACにそれぞれ平行な直線をひき，
辺AC，ABとの交点をそれぞれQ，Rとする。
このとき，PQ＋PR＝ABとなることを証明しなさい。

図をかいてみましょう。

（　）組（　）番　名前（　　　　　　　）

いろいろな証明 ワークシートB　　　　月　　日（　）

問題 右の図で，△ABCはAB＝ACの二等辺三角形である。
点Pは辺BC上にある。
点Pを通り，辺AB，ACにそれぞれ平行な
直線をひき，辺AC，ABとの交点を
それぞれQ，Rとする。このとき，
PQ＋PR＝ABとなることを証明しなさい。



証明の方針を図にしてみましょう。

証明をかいてみましょう。

証明

（　）組（　）番　名前（　　　　　　　）

3　まとめと今後の予定

今回作成した指導案にて，令和６年２月中に図形委員会の教員が所属する各学校にて研究授業を行う。成果と課題については，来年度の研究発表する予定である。今後も、生徒が主体的に説明し、根拠をもって説明する力を身に付けられるよう、図形領域における教材研究をすすめ、実践を通した提案ができるよう、研究を進める。

［参考・引用文献］

○東京都中学校数学教育研究会　研究部　図形委員会

・令和４年度　第 60 回東京都中学校数学教育研究発表大会　発表資料
「根拠を明らかにして説明する力を身に付けさせる図形指導」

○中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編（文部科学省）

○国立教育政策研究所ホームページ
https://www.nier.go.jp/kaihatsu/zenkokugakuryoku.html

○平成 29 年度全国学力調査問題

令和５年度　図形委員会　委員名簿（◎は代表者）	
秋葉　　養（江戸川区立葛西中学校）	林　　倫道（千代田区立九段中等教育学校）
井上　直大（板橋区立上板橋第二中学校）	林　　直秀（足立区立六月中学校）
◎加藤　尚代（杉並区立向陽中学校）	春名　秀夫（江東区教育センター）
小林　真晴（江東区立辰巳中学校）	堀　　孝浩（中野区立緑野中学校）
篠原　崇宏（大田区立馬込東中学校）	本多　竜也（板橋区立赤塚第一中学校）
柴山　勇斗（板橋区立赤塚第二中学校）	村上　快斗（板橋区立志村第一中学校）
菅田　圭一（江戸川区立清新第一中学校）	村田　浩文（板橋区立赤塚第一中学校）
谷　　竜己（都立白鴎高等学校・附属中学校）	渡部　陽祐（中野区立中野東中学校）
戸田　匡哉（台東区立御徒町台東中学校）	我妻　　言（江東区立大島中学校）
中村　祐紀（板橋区立志村第一中学校）	山中　建佑（江東区立深川第一中学校）