

変化の割合の概念・意味の理解

— 具体的な場面を通して —

東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会

1 研究のねらい

本委員会では、平成31年より関数指導におけるICTを利用した指導の提案をし、研究授業を行い、関数の値の変化の割合(以下「変化の割合」と略して示す)の概念・意味を深める指導の視点から、その指導の妥当性を明らかにしてきた。

昨年度は、ICTを利用し、変化の割合の概念・意味の指導を行った。中2の第3,4時「変化の割合の素地的な学習」の指導について再検討し、第3時の実践と報告を行った。

本年度は、昨年度の研究を引き継ぎ、第4時の実践を行い、変化や対応のようすを考察する活動を通して、変化の割合の概念・意味を深めさせることを研究のねらいとする。

2 本研究の内容

(1) 変化の割合の素地的な学習について

本委員会では、変化の割合の指導について、具体的な事象の中でそのもつ意味を理解させ、その概念を深める素地的な学習の指導を重視している。

本研究は、具体的な事象を通して、生徒の視点から変化の割合は「 x の1増加量に対する y の増加量」であることを見だし、事象の中でその意味を深める指導を追究することである。そこでは、生徒自身が「 x の1増加量に対する y の増加量」を見いだす姿勢や必要感が指導の力点となる。そのことから、次の指導の流れ、課題の設定の工夫をし、指導にあたった。

第1,2時…1次関数の意味(題材:片側階段)

$y=ax+b$ の a の意味を考える³⁾

第3,4時…本発表は第4時

第3時については、身近にある題材として、ゲリラ豪雨に着目した。雨の量を測る雨量計の水面の高さを、ICTを利用し示すことで、それが一定の割合で増加し、1次関数とみなすことができると考え、この教材を取り上げた。

第4時については、第3時の水面の高さの増加に着目したのに対し、その減少に着目させる、教材を取り上げた。ICTを利用し、その減少の様子を示すことで、 $a>0$ または $a<0$ のそれぞれの変化の割合の特徴を理解させるため、水槽の場面を取り上げた。

1	1次関数の意味	<p>課題 1辺の長さが1cmの正方形を図のように積んでいきます。</p> <p>① 伴って変わる量をあげる。</p> <p>② 階段の数がx段のときの周の長さをycmとして、変化の様子を調べる。</p> <p>③ 表・グラフ・式($y=4x$)を求める。</p> <p>④ $y=4x$の定数4の意味を考える。</p>	
2		<p>⑤ 階段の数がx段のときの頂点の数をy個として、その変化の様子を調べる。</p> <p>⑥ 階段の数がx段のときの直角の数をy個として、その変化の様子を調べる。</p> <p>⑦ 「yはxの1次関数である」ことを定義する。</p>	

(2) 単元「1次関数」の指導計画について


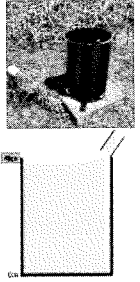
本単元の指導計画は、変化の割合の素地的な指導を行った後に、変化の割合の定義をし、その活用場面を設定し、関数的な見方・考え方を深める次の流れである。

[指導計画の概要]

- | | |
|-----------------------------------|----------------|
| ① 1次関数の意味(2h) | ⑤ 1次関数の求め方(1h) |
| ② 変化の割合の素地的な学習(2h)
※P2, 3~6 参照 | ⑥ 問題演習(1h) |
| ③ 1次関数のグラフ(3h) | ⑦ 方程式と関数(4h) |
| ④ 1次関数のグラフと変化の割合(1h) | ⑧ グラフのよみ(1h) |
| …「(1次関数の)変化の割合を定義する」 | ⑨ 1次関数の利用(3h) |
| | ⑩ 問題演習(1h) |
- 計 19 時間

(3) 中2第3時の指導

第3時の指導は、昨年度の島根大会で発表¹⁾した。第3時の学習指導案の詳細は、東京都中学校数学教育研究会の関数委員会のホームページ²⁾に掲載している。

<p>[日常の場面]</p> <p>最近、ゲリラ豪雨で被害が出たというニュースを耳にします。豪雨というのは、どのようなことから判断するのだろうか。</p> 	<p>[課題場面]</p> <p>右の写真は「転倒ます型雨量計」という雨量を計測する計測器です。この雨量計の中には円柱状の容器があり、そこに雨が溜まっていくことで降水量を調べています。円柱状の容器に雨が溜まっていくようすを観察してみましよう。 (動画)</p> 
---	--

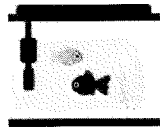
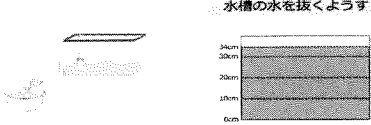
(4) 中2第4時の指導と学習指導案

① 学習指導案

本時のねらい 具体的な事象を通し $y=ax+b$ の関係について、変化の割合の視点で表やグラフを使い、調べることができる。

$y=ax+b$ の a について、変化の割合の特徴を $a>0$ または $a<0$ の場合を考え、判断し見いだすことができる。

本時の展開

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
<p>日常の場面を考える</p>	<p>[日常の場面]</p> <p>飼っている金魚の水槽の水を交換しようと考えています。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ・日常の場面については、教師が話題にしなが興味・関心をもたせる。
<p>課題場面を把握する</p>	<p>[課題場面]</p> <p style="text-align: center;">水槽の水を抜くようす</p>  <p>上の図は水槽から水を排水するポンプです。このポンプを使って水を排水し、また水を入れ替えることを考えます。ポンプで水を排水する様子を観察してみよう。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・水槽の写真を見せ、イメージをもたせてもよい。 ・水槽がかかれた図と自由意見が書けるプリントを配布する。
<p>変化のようすを考える</p>	<p>(2) この動画を観て、気付いたことをいみましょう。</p> <p>ア 途中で減り方が変わっている。</p> <p>イ 途中で減り方が遅くなっている。</p> <p>ウ マスや数値がないから、変化が分からない。</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・0 cmと 34 cmの目盛りが入った水槽から水が減っていくようすの動画を観察させる。 ・必要に応じて、動画は繰り返し見せる。 ・生徒の感覚的な表現を取り上げ、速さや高さに注目させるようにやり取りをする。 ・意見アやイは具体的にどのように変わっているかを問い、(3)につなげる。

視点を定め、変化のようすをとらえる

(3) 時間に注目しながら、もう一度じっくり観察していきましょう。水の減り方の様子で気が付いたことを言きましょう。

- ア 6分前後で変わっている。
- イ 6分のところで減り方が遅くなった。
- ウ 6分の前の方が減り方は速い。

- ・動画は、目盛りが10cm刻みの水槽で、時計が入ったものを何度か見せる。
- ・問題提示のときに配ったプリントと同じもの(新しいもの)を配布し、気づいたことを書かせる。

めあてを示す

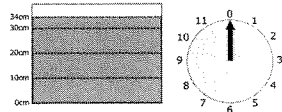
めあて「水の高さの変化のようすを(詳しく)調べよう」

課題を提示する

〔課題〕

深さ34cmの水槽から水を抜いていきます。水面の高さの様子についてx分後の水面の高さをy cmとします。水面の高さの変化のようすを詳しく調べよう。

水槽の水を抜くようす

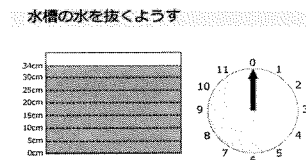


- ・プリントを配布する。

(4) 水面の高さはどのように変わりますか。これまでのことを整理してみましょう。

- ア 最初は34cmまで入っている。
- イ 6分後に水の高さが10cmになる。
- ウ 水を抜き始めてから10分後には0cmになった。
- エ 6分を過ぎたら、水の高さの減り方が変わる。
- オ 6分を過ぎたら、4分間で10cm水が減る。
- カ 0~6分のほうが、減り方が大きい。
- キ 6~10分のほうが、減り方が小さい。
- ク 6分間で24cm水が減る。
- ケ 0~6分で一定に減り、6~10分でも一定に減る。

- ・最初、水が34cmまで入っている状態を、0分で34cmと確認する。
- ・時間とともに水面の高さが変わるようすの動画を見せる。マス目は、だんだん細かくしていく。生徒から見たいという意見が出れば、それに応じて見せていく。



表をかいて変化のようすを調べる

(5) xとyの関係を、表を書いて調べましょう。

ア

x(分)	0	6	10
y(cm)	34	10	0

$\overset{+6}{\curvearrowright}$ $\overset{+4}{\curvearrowright}$
 $\underset{-24}{\curvearrowleft}$ $\underset{-10}{\curvearrowleft}$

0分から6分までは $-24 \div 6 = -4$ なので、1分間に4cmずつ減っている

6分から10分までは $-10 \div 4 = -2.5$ で、1分間に2.5cmずつ減っている

イ

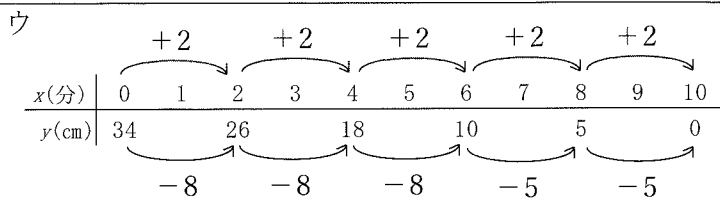
x(分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y(cm)	34	30	26	22	18	14	10	7.5	5	2.5	0

$\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$ $\overset{+1}{\curvearrowright}$

$\underset{-4}{\curvearrowleft}$ $\underset{-4}{\curvearrowleft}$ $\underset{-4}{\curvearrowleft}$ $\underset{-4}{\curvearrowleft}$ $\underset{-4}{\curvearrowleft}$ $\underset{-4}{\curvearrowleft}$ $\underset{-2.5}{\curvearrowleft}$ $\underset{-2.5}{\curvearrowleft}$ $\underset{-2.5}{\curvearrowleft}$ $\underset{-2.5}{\curvearrowleft}$

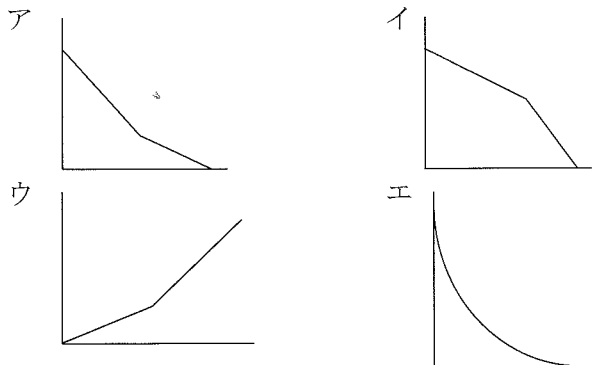
0分から6分までは、1分間に4cmずつ減る
 6分から10分までは、1分間に2.5cmずつ減る

- ・0~6分と6~10分はそれぞれ一定の減り方であるとみなすと確認する。
- ・「6分後に10cmとみなす」ことを教師が伝える。
- ・動画は見せずに、表を書かせていく。
- ・何にもかけない生徒には、1分ごとの表を書かせるように促す。
- ・1分間に何cmずつ水面の高さが変化するか考えさせる。
- ・グループで話し合ったり、タブレットで動画を見られたりしてもよい。
- ・「4cm減る」・・・-4cm
 「2.5cm減る」・・・-2.5cmのように「減る」言葉と±の数値を対応させ板



0分から6分までは $-8 \div 2 = -4$ なので、1分間に4cmずつ減る。
6分から10分までは $-5 \div 2 = -2.5$ で、1分間に2.5cmずつ減る。

(6) グラフを選びましょう。また、その理由も言いましょう。



ア 変化する前後は、規則的に変化するようにした。
イ 6分までは1分あたり4cm減るようにした。
ウ 6分までは1分あたり-4cm増えるようにした。
エ 6分からは1分あたり2.5cm増えるようにした。
オ 6分からは1分あたり-2.5cm減るようにした。

確認問題を解く

〔問題〕

水槽の水の高さが、次のように変化したとき、最も変化のしかたが大きいのは、何分から何分のところですか。

x(分後)	0	5	10	25
y(cm)	30	10	0	30

(7) 答えと理由をいっていきましょう。

ア 0分から5分で20cm減っているから1分あたり4cm減っている。同じように5分から10分は10cmなので1分あたり2cm減っている、10分から25分は、1分あたり2cm増えているので、0分から5分が最も変化が大きい。【A評価】

イ 0分から5分で20cm減っているから5分あたり20cm減っている。同じように5分から10分は10cmなので5分あたり10cm、10分から25分は、5分あたり10cmなので0分から5分が最も変化が大きい。

【B評価】

ウ 10分から25分で30cm増えているから、最も変化が大きい。【C評価】

まとめ

○本時の授業のまとめをします。
1分あたりの変化に注目すると、変化についてわかりやすくなる。

書。そして、「もし、+2.5cm だったら「減る？増える？」を問う。

- ・生徒の発言から、一定の割合の考えに触れ、減っている理由に触れる。
- ・ウやオの意見を取り上げて確認をする。
- ・最後に表の確認をする時に、スライドで水の変化のようすとグラフと連動させて見せる。

- ・確認問題として、1分間あたりの変化の量を考えさせることに、注目させる。

【評価規準】

- A 1あたり量をもとに、複数の増え方や減り方を比較して、理由が述べられている。
- B 増加量で理由が述べられている。あるいは、複数の増え方や減り方を比較せずに、理由が述べられている。

- ・出てきた意見を確認し、次時以降につなげていく。

② 研究協議

(授業者自評)

- ・第3時を学習したので、第4時の指導内容は、生徒はほとんど理解し、指導の流れがスムーズだった。

- ・水面の高さの増え方が一定とみなすと、私は、改めて言うてしまったが、生徒の何人かもそういう風に考えていた。一定と言うてしまったことは、指導のミスと思った。
- ・どのタイミングで、増え方が変わるかのアニメーションからの生徒の読み取りは、スムーズだった。

(課題場面)

- ・特に問題は感じられなかった。

(課題及び指導案(5))

- ・アニメーションからの生徒の読み取りは、スムーズだった。これは、第3時の指導の効果も現れている。第3時の増え方の考察経験が、本時の課題「減り方の考察」に現れたと考える。
- ・第3時では、変化の割合が変わる前後では、その判断がなかなかつかず、課題の本質に辿り着くまで指導の時間がかかった。本時では、その指導の成果から水面の高さの減少に伴う変化の割合が変わる前後のアニメーションの読み取りや表の作成がスムーズであった。

(指導案(6)について)

- ・どのグラフがこの事象に当てはまるについては、指導者がグラフのエは×、その理由を問うたら、生徒は一定ではないと言った。それ以上の生徒とのやり取りはなかった。もっと、生徒とのやり取りに時間をかけるべきであろう。
- ・教師が理由を問うた時に、発言はしなかったが、曲線を表すようなニュアンスで指を動かしていた生徒がいた。曲線は、水面の高さの減り方が一定ではないことを理解していると汲み取れた。

(確認問題について)

- ・与えた表では、 x の値の10から25の間に、さも15, 20が入りそうな空白を意図的に与えている。変化の割合が一定であると考え、考察し判断できるかどうかというイメージが大切である。与える表では、意図的な空白のない x, y の値の組を提示し、生徒にその意味を理解させたい。

(その他)

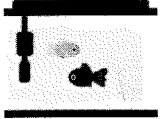
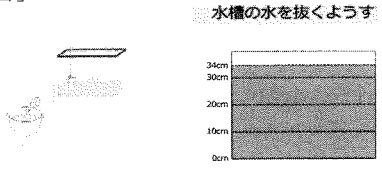
- ・第3時の最後で、1分あたりでみるとわかりやすくなるとまとめため、第4時では、 x の増加量1あたりの y の増加量に着目する生徒が増えた。

(5) 中2第4時 改訂学習指導案

本時のねらい 具体的な事象を通し $y=ax+b$ の関係について、変化の割合の視点で表やグラフを使い、調べることができる。

$y=ax+b$ の a について、変化の割合の特徴を $a>0$ または $a<0$ の場合を考え、判断し見いだすことができる。

本時の展開

学習活動	主な発問と予想される生徒の反応	指導上の留意点
日常の場面を考える	<p>[日常の場面]</p> <p>飼っている金魚の水槽の水を交換しようと考えています。</p> 	<ul style="list-style-type: none"> ・日常の場面については、教師が話題にしなが興味・関心をもたせる。
課題場面を把握する	<p>(1) 水槽で金魚や魚を飼っている人はいますか。どのように水を入れ替えますか。</p> <p>ア 金魚を他の入れ物に移し替えて、水を全部入れ替える。</p> <p>イ 水を出すときにポンプを使って、水を出す。</p> <p>[課題場面]</p>  <p>上の図は水槽から水を排水するポンプです。このポン</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・水槽の写真を見せ、イメージをもたせてもよい。 ・水槽がかかれた図と自由意見が書けるプリントを配布する。 ・0 cmと34 cmの目盛りが入った水槽から水が減っ

変化のようすを考える

プを使って水を排水し、また水を入れ替えることを考えます。ポンプで水を排水する様子を観察してみよう。

- (2) この動画を見て、気付いたことをいみましょう。
- ア 途中で減り方が変わっている。
 - イ 途中で減り方が遅くなっている。
 - ウ マスや数値がないから、変化が分からない。

視点を定め、変化のようすをとらえる

- (3) 時間に注目しながら、もう一度じっくり観察していきましょう。水の減り方の様子で気が付いたことをいみましょう。
- ア 6分前後で変わっている。
 - イ 6分のところで減り方が遅くなった。
 - ウ 6分の前の方が減り方は速い。

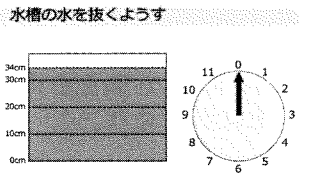
めあてを示す

めあて「水の高さの変化のようすを(詳しく)調べよう」

課題を提示する

〔課題〕

深さ 34cm の水槽から水を抜いていきます。水面の高さの様子について x 分後の水面の高さを y cm とします。水面の高さの変化のようすを詳しく調べよう。



- (4) 水面の高さはどのように変わりますか。これまでのことを整理してみましょう。
- ア 最初は 34cm まで入っている。
 - イ 6分後に水の高さが 10 cm になる。
 - ウ 水を抜き始めてから 10 分後には 0cm になった。
 - エ 6分を過ぎたら、水の高さの減り方が変わる。
 - オ 6分を過ぎたら、4分間で 10cm 水が減る。
 - カ 0~6分のほうが、減り方が大きい。
 - キ 6~10分のほうが、減り方が小さい。
 - ク 6分間で 24 cm 水が減る。
 - ケ 0~6分で一定に減り、6~10分でも一定に減る。

表をかいて変化のようすを調べる

(5) x と y の関係を、表を書いて調べましょう。

ア

x (分)	0	6	10
y (cm)	34	10	0

$\overset{+6}{\curvearrowright}$ $\overset{+4}{\curvearrowright}$
 $\underset{-24}{\curvearrowleft}$ $\underset{-10}{\curvearrowleft}$

0分から6分までは $-24 \div 6 = -4$ なので、1分間に 4 cm ずつ減っている
 6分から10分までは $-10 \div 4 = -2.5$ で、1分間に 2.5 cm ずつ減っている

ていくようすの動画を観察させる。

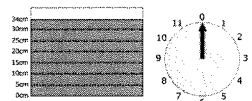
- ・必要に応じて、動画は繰り返し見せる。
- ・生徒の感覚的な表現を取り上げ、速さや高さに注目させるようにやり取りをする。
- ・アやイの意見は具体的にどのように変わっているかを問い、(3)につなげる。

- ・動画は、目盛りが 10 cm 刻みの水槽で、時計が入ったものを何度か見せる。
- ・問題提示のときに配ったプリントと同じもの(新しいもの)を配布し、気づいたことを書かせる。

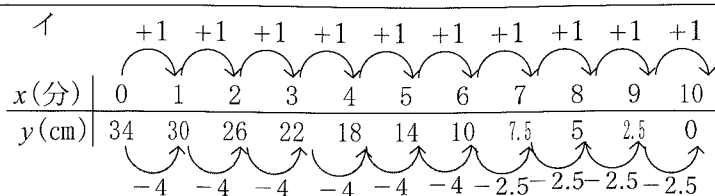
- ・プリントを配布する。

- ・最初、水が 34cm まで入っている状態を、0 分で 34cm と確認する。
- ・時間とともに水面の高さが変わるようすの動画を見せる。マス目は、だんだん細かくしていく。生徒から見たいという意見が出れば、それに応じて見せていく。

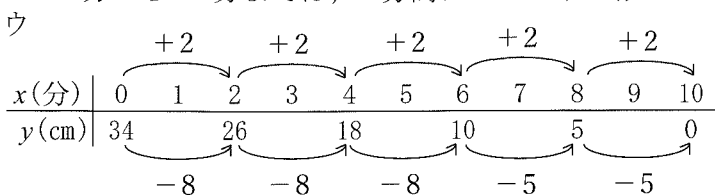
水槽の水を抜くようす



- ・0~6分と6~10分はそれぞれ一定の減り方であるとみなすと確認する。
- ・「6分後に10cmとみなす」ことを教師が伝える。
- ・動画は見せずに、表を書かせていく。
- ・何にもかけない生徒には、1分ごとの表を書かせるように促す。
- ・1分間に何cmずつ水面の

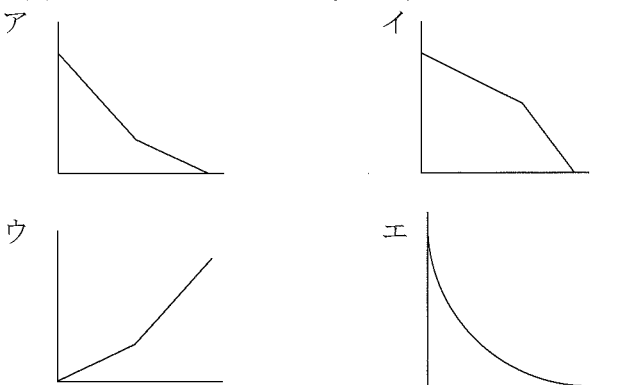


0分から6分までは、1分間に4cmずつ減る
 6分から10分までは、1分間に2.5cmずつ減る



0分から6分までは $-8 \div 2 = -4$ なので、1分間に4cmずつ減る。
 6分から10分までは $-5 \div 2 = -2.5$ で、1分間に2.5cmずつ減る。

(6) グラフを選びましょう。また、その理由も言いましょう。



ア 変化する前後は、規則的に変化するようにした。
 イ 6分までは1分間あたり4cm減るようにした。
 ウ 6分までは1分間あたり4cm増えるようにした。
 エ 6分からは1分間あたり2.5cm増えるようにした。
 オ 6分からは1分間あたり2.5cm減るようにした。

確認問題を解く

【問題】

水槽の水の高さが、次のように変化するとき、最も変化のしかたが大きいのは、何分から何分のところですか。

x (分後)	0	5	10	25
y (cm)	30	10	0	30

(7) 答えと理由をいっていきましょう。

ア 0分から5分で20cm減っているから1分あたり4cm減っている。同じように5分から10分は10cmなので1分あたり2cm減っている、10分から25分は、1分あたり2cm増えているので、0分から5分が最も変化が大きい。【A評価】

イ 0分から5分で20cm減っているから5分あたり20cm減っている。同じように5分から10分は10cmなので5分あたり10cm、10分から25分は、5分あ

高さが変化するか考えさせる。

- ・グループで話し合ったり、タブレットで動画を見られたりしてもよい。
- ・「4cm減る」 $\cdots -4\text{cm}$
「2.5cm減る」 $\cdots -2.5\text{cm}$ のように「減る」言葉と±の数値を対応させ板書。そして、「もし、+2.5cmだったら「減る？増える？」を問う。
- ・生徒の発言から、一定の割合の考えに触れ、減っている理由に触れる。

- ・ウやオの意見を取り上げて確認をする。
- ・最後に表の確認をする時に、スライドで水の変化のようすとグラフと連動させて見せる。

- ・確認問題として、1分間あたりの変化の量を考えさせることに、注目させる。

【評価】

- A 1あたり量をもとに、複数の増え方や減り方を比較して、理由が述べられている。
- B 増加量で理由が述べられている。あるいは、複数の増え方や減

	たり 10cm なので 0 分から 5 分が最も変化が大きい。 【B 評価】 ウ 10 分から 25 分で 30cm 増えているから、最も変化が大きい。【C 評価】	り方を比較せずに、理由が述べられている。
まとめ	○本時の授業のまとめをします。 x の増加量 1 あたりの y の値の増加量に注目するとよい。	・出てきた意見を確認し、次時以降につなげていく。

3 今後の課題

今後は次の①～③を課題として、研究を進めていく。

- ① 作成した指導案を授業実践し、その妥当性を検証する。
- ② 関数指導に ICT や教具を取り入れ、数学的に解決できる能力を養えるような指導計画の改善や指導案の作成を行い、研究授業を通し実証的に研究を進める。
- ③ 関数指導における小・中・高の系統的な指導の在り方について、研究を行っていく。

[引用・参考文献]

- 1) 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会
全国算数・数学教育研究(島根)大会発表資料(2022)
- 2) 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会ホームページ
<http://www.tochusu.com/function.html>
- 3) 東京都中学校数学教育研究会 研究部 関数委員会(2012)
「中学校数学科 関数指導を極める」, 明治図書

令和 5 年度 関数委員会 委員名簿 (◎は代表者)	
板垣 陽介 (大田区立羽田中学校)	高山 琢磨 (港区立港南中学校)
小高 洋平 (北区立滝野川紅葉中学校)	塚本 桂子 (新宿区立西早稲田中学校)
桑原 宏一 (港区立高陵中学校)	堀 孝浩 (中野区立緑野中学校)
齋藤 圭祐 (東京都教育委員会)	待山 貴彦 (武蔵村山市立第五中学校)
酒井 翔 (北区立堀船中学校)	山本 恵悟 (足立区立千寿青葉中学校)
◎ 菅田 圭一 (江戸川区立清新第一中学校)	吉田 直樹 (練馬区立大泉第二中学校)
関 富美雄 (渋谷区立上原中学校)	吉田 裕行 (世田谷区立砧南中学校)
高村 真彦 (練馬区立北町中学校)	
〈共同研究者〉	
風間喜美江 (元香川大学)	