

『式による説明』の指導法の提案

東京都中学校数学教育研究会 研究部 導入法委員会

1 研究主題設定の理由

第2学年、第1章「式の計算」における式による説明について、学習指導要領には『指導に当たっては、具体的な数で計算することから、成り立つ性質を生徒が見いだしたり、見いだした性質について文字を用いて表現する方法を検討したりするなどの機会を設けることが大切である。(中学校学習指導要領 平成29年告示)』と書かれている。そこで、現在発行されている7社の教科書(東京書籍、大日本図書、学校図書、教育出版、啓林館、数研出版、日本文教出版)において、成り立つ性質を生徒が見いだすということについて、どのような題材が扱われているのかを調べ、比較した。また、生徒への問いかけの仕方として、以下のア、イの2つの場合に分類した。

ア 「偶数と奇数の和」について、 $2 + 7 =$ 、 $20 + 11 =$ 、のように具体的な計算を示して「偶数と奇数の和はどのような結果になりますか」というように問いかけ、生徒に気が付かせてから説明をさせる場合

イ 「偶数と奇数の和は奇数になる」のように成り立つ性質を簡潔に示し、それを説明する場合

題材	ア 気が付かせる	イ 簡潔に示している
偶数と奇数の和は奇数になる	5社	1社
連続する3つの整数の和は3の倍数になる	3社	3社
連続する5つの整数の和は5の倍数になる	2社	0社
2桁の自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との和は11の倍数になる	6社	1社
2桁の自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえてできる数との差は9の倍数になる	5社	0社
カレンダーで縦2つ、横2つの正方形で囲んだ4つの数の和は4の倍数になる	1社	2社

上記の結果より、それぞれの教科書で生徒自身が成り立つ性質に気が付くということを大切にしていることがわかる。ただ、「気が付く」という表現を使ったように、例えば「連続する3つの整数の和について、気が付いたことをあげなさい」という形で、あくまでも題材自体はあらかじめ用意してあるので、成り立つ性質を生徒自身が見いだすという意味とは少し違ってくるように思う。(なお、「カレンダーの数の並びにはどんな性質があるのでしょうか」という問いかけから、「その性質がいつでも成り立つことを説明してみましよう」というように、成り立つ性質を生徒自身が見いだし、それを説明するという活動を題材にしている教科書は1社あった。)

そこで、生徒自らが成り立つ性質を見だし、その性質がいつでも成り立つことを文字を用いて説明したいと思える題材を考えた。

2 研究のねらいと研究方法

研究のねらいは、生徒が自ら、数の並びの中から成り立つ性質を見いだすことで、その性質を主体的に文字を用いて説明したいという意欲を喚起することである。また、文字を用いて説明する活動を通して、文字式の良さを実感し、他の題材についても文字を用いて説明しようとしたり、発展的に考えたりする態度を養うことである。

研究の方法は、作成した指導案を基に検証授業を行い、授業後の生徒アンケートから、成果や課題を検討するというものである。数の性質を発見しやすい題材として「パスカルの三角形」を扱い、生徒が自ら発見した性質を文字を用いて説明する授業展開とした。

3 本年度の研究経過

- 5月13日（金）研究テーマの検討及び活動年間計画の立案
- 6月24日（金）教材の検討1
- 7月29日（金）教材の検討2
- 8月30日（火）指導案の検討1
- 9月30日（金）指導案の検討2
- 11月4日（金）検証授業・研究発表集録原稿の検討
- 12月27日（火）研究発表集録原稿の検討・完成
- 2月18日（土）東京都中学校数学教育研究発表大会

4 検証授業における指導計画

(1) 概要

- ア 授業日 令和4年11月4日
- イ 対象 世田谷区上祖師谷中学校 第2学年C組34名
- ウ 指導者 世田谷区上祖師谷中学校 主任教諭 石川 寛樹
- エ 教科書 東京書籍「新しい数学2」
- オ 単元名 1章「式の計算」 2節「文字式の利用」

(2) 単元指導計画（全14時間扱い）

節	項	時数	学習内容
1 式の計算	文字式のしくみ	1	・文字式について、単項式と多項式、式の次数の意味を理解する。
	多項式の計算	3	・同類項の意味及び同類項は1つにまとめられることを理解する。 ・多項式の加法・減法、多項式と数の乗法・除法の計算をする。 ・分数係数を含む式など、やや複雑な式の計算をする。
	単項式の乗法・除法	2	・単項式の乗法・除法の計算をする。
	式の値	1	・式の計算を活用して式の値を効率的に求める。
	問題演習	1	・第1節の理解を深める。

2 式の利用	文字式による説明 (本時)	3	<ul style="list-style-type: none"> ・パスカルの三角形における数の性質を、具体的な数の計算をもとに予想し、その予想がいつでも成り立つことを説明するには文字を使えばよいことを知る。(本時) ・数や図形の性質を帰納や類推によって予測し、文字式を用いて演繹的に説明する。
	等式の変形	1	<ul style="list-style-type: none"> ・2つ以上の文字を含んだ等式を、ある文字について解く。 ・目的に応じて文字式を変形するよさを考える。
	問題演習	1	<ul style="list-style-type: none"> ・第2節の理解を深める。
章の問題		1	<ul style="list-style-type: none"> ・第1章の総合問題を解き、理解を深める。

(3) 本時のねらい

ア 生徒が自ら数の性質を見だし、その性質がいつでも成り立つことを、主体的に文字を用いて説明しようとする。(主体的に学習に取り組む態度)

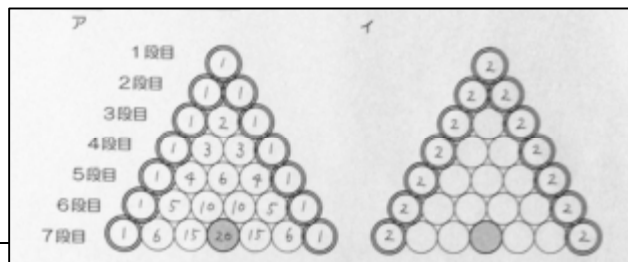
イ 文字を用いて説明することの必要性、良さを実感し、他の場面でも文字式を活用することができる。(思考・判断・表現)

(4) 指導に当たって

生徒が自ら成り立つ性質を見だし、文字を用いて主体的に説明しようと思えるための題材として、パスカルの三角形を扱う。本時では、7段目の真ん中の数に着目して、その性質を発見し、文字を用いて説明する。展開1では、パスカルの三角形のすべての枠を埋めなくても7段目の真ん中の数を予想できることから、その性質がいつでも成り立つことを文字を用いて説明する。その際、教師が「文字を用いて説明しよう」と指示するのではなく、生徒から主体的に「文字を利用したい」という意見が出るような発問の工夫をする。展開2では、展開1の条件を変えた場合にどのようなことが成り立つのか予想し、説明する。本時では教師が条件変えを指示するが、このような学習活動を積み重ねながら、今後の学習において生徒が自ら「～の場合はどうなるのだろう」と条件を変えたり発展的に考えたりできるような素地をつくる。

(5) 本時の展開 (全14時間中の9時間目)

	指導内容	学習内容 (『』発問、▶ 指示説明、・ 予想される生徒の反応)	・ 指導上の留意点 ◇ 評価
導入 (15分)	題材を把握し、7段目の真ん中の数について予想する。	<p>▶パスカルの三角形の紹介と計算のきまりを説明する。(ワークシート配布)</p> <p>[課題1]</p> <p>▶1段目の数が1の場合の図と、1段目の数が2の場合の図において、7段目まで計算する。</p>	<p>・ 計算結果を大型テレビに映すなどして、全体で考えやすいようにする。</p>

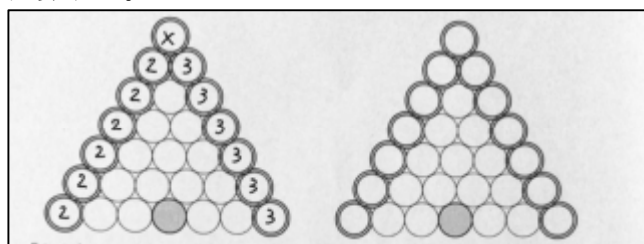


		<p>『7段目の真ん中の数に着目すると、1段目の数が3のときは7段目の真ん中の数はいくつになりそうですか。それはなぜですか。』</p> <ul style="list-style-type: none"> ・1段目の数が1のときは20、1段目の数が2のときは40だから、1段目の数が3のときは60だ。 ・20ずつ増えるから、60だ。 <p>『7段目の真ん中の数について、どのようなことが言えそうですか。』</p> <ul style="list-style-type: none"> ・1段目の数の20倍になりそうだ。 ・20の倍数になりそうだ。 ・偶数になりそうだ。 <p>『予想した性質がどのような場合でも成り立つかどうか調べるには、どうすればよいですか。』</p> <ul style="list-style-type: none"> ・文字を利用すればよい。 ・1段目の真ん中の数を文字において、計算していけばよい。 <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px;"> <p>補助発問</p> <p>『具体的な数で調べることには限界がありますね。どうすればよいでしょう。』</p> <p>『この単元で学習したことを利用できないでしょうか。』</p> <p>『1年次では、どんな偶数(または奇数)でも成り立つことなどを調べるのに、どのように考えましたか。』</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>ねらい</p> <p>文字を用いて説明する良さとはなんだろう。</p> </div>	<ul style="list-style-type: none"> ・全ての枠が空欄になっているパスカルの三角形をワークシートに入れて、生徒が1段目の数を自由に設定して調べられるようにする。 ・「1段目の数が5のときは7段目の真ん中の数はいくつになるだろう」など補助発問をして、どのような性質が成り立つか予想しやすいようにする。 ・生徒の実態に応じて補助発問をして、生徒から「文字を利用する」という意見が出るようにする。 ・3段目の真ん中の数が $2a$ になること等を押さえ、計算の見通しを立てる。 <p>◇生徒が自ら数の性質を見だし、その性質がいつでも成り立つことを、主体的に文字を用いて説明しようとする。(主体的に学習に取り組む態度)</p>
<p>展開 (30分)</p>	<p>導入で発見した性質を、文字を用いて説明する。</p>	<p>▶1段目の数を x とし、7段目まで計算する。</p> <p>『7段目の真ん中の式を見ると、どんなことがわかりますか。』</p> <ul style="list-style-type: none"> ・$20x$ になったので、1段目の数の20倍だということが言える。 ・文字を利用すると、いつでも1段目の数の20倍だということが説明できた。 	<p>◇文字を用いて説明することの必要性、良さを実感し、他の場面でも文字式を活用することができる。(思考・判断・表現)</p>

条件を変えたパスカルの三角形について考える。

〔課題 2〕

▶「への字」の部分の左右の数字を変えた図について考える。1つ目の図は教師が与えて、7段目まで計算する。



・左側の数が2で右側の数が3の場合は、7段目の真ん中の数は50になった。

・〔課題1〕のように、また1の位が0になった。

▶「への字」の部分の左側と右側に好きな数を入れて、7段目まで計算する。何人かの生徒の図を提示し、性質を考える。

『7段目の真ん中の数について、どのようなことが言えそうですか。どのような場合でも成り立つかどうか調べるには、どうすればよいですか。』

・10の倍数になりそうだ。

・3段目の真ん中の数の10倍になりそうだ。

・左右の数を足した数の10倍になりそうだ。

・文字を用いて7段目の真ん中の数がどのような式になるのか調べたい。

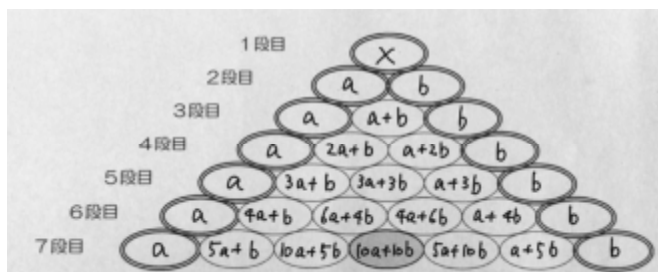
・どのように文字におけばいいのかな。

『「への字」の部分について、どのように文字におけば良いですか。』

・文字を2つ使えばよい。

・左側の数を a , 右側の数を b とすれば良い。

▶左側の数を a , 右側の数を b として、7段目まで計算する。



・条件の変え方はいろいろな場合があるが、ここでは〔課題2〕を教師が提示し、その他の条件変えについては自主学习用の課題や次時への課題とする。

・いくつかの場合について、生徒の図をICTを用いて集約し、大型テレビや生徒用タブレットの画面に映す。

・生徒の実態に応じて、周囲と意見交換する時間を設けて予想が出やすいようにする。

◇生徒が自ら数の性質を見だし、その性質がいつでも成り立つことを、主体的に文字を用いて説明しようとする。(主体的に学習に取り組む態度)

・〔課題1〕との違いを考えさせ、この〔課題2〕では文字を2つ用いなければいけないことを押さえて、単元の学習を想起させる。

・生徒のワークシートを大型テレビに映して計算結果を確認する。黒板には7段目の真ん中の式だけ板書する。

		<p>『7段目の真ん中の式を見ると、どんなことがわかりますか。』</p> <ul style="list-style-type: none"> ・a を 10 倍した式と b を 10 倍した式の和になっている。 ・ $10a + 10b = 10(a + b)$ と変形できるから、左側の数と右側の数の和の 10 倍と見ることができる。 ・ 左側の数が 2 で右側の数が 3 のときは、$10 \times (2 + 3)$ で 50 になっていたということか。 <p>『7段目の真ん中の数以外の数について、成り立つことはありますか。』</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 5 段目の真ん中の数は、$3a + 3b = 3(a + b)$ と表されるから、左側の数と右側の数の和の 3 倍ということがわかる。 ・ 3 段目、5 段目、7 段目の真ん中の数は、全て左側の数と右側の数の和の倍数になっている。9 段目の真ん中の数は何倍になるのかな。 ・ 文字式で表された図を利用すると、7 段目の真ん中の数以外の数の性質についても、いろいろなことがわかるな。 	<p>◇文字を用いて説明することの必要性、良さを実感し、他の場面でも文字式を活用することができる。(思考・判断・表現)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 予想の場面で用いた生徒のいろいろな図を改めて見せて、7 段目の真ん中の数が $10(a + b)$ で表されていることを確認する。 ・ 左記のように発問し、7 段目の真ん中の数以外の数の性質についても説明できることに気付かせ、文字を用いた式の良さを実感できるようにする。
まとめ (5分)	本時を振り返る。	<p>▶文字を用いて説明する良さについて、本時の学習を通して考えたことを発表する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ 発見した数の性質がいつでも成り立つことを説明することができた。 ・ 初めは気が付かなかった性質についても、文字で表された図を利用すると気付くことができた。 ・ パスカルの三角形について、[課題 2] 以外の条件変えをしてどのような性質があるか調べてみたいな。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ これから深めたいこと、調べたいことなどについても発問し、他の条件変えを考えている生徒の意見を取り上げて自主学習用の課題とする。

5 検証授業（2回目）における成果と課題

(1) 成果（「」：生徒の振り返りアンケートより）

ア 主体的に取り組ませることについて

『授業に意欲的にとりくめましたか』という質問に対し、27名中21名が「あてはまる」、6名が「ややあてはまる」を選択した。

「数字の規則を見つける問題は楽しかった」

「パスカルの三角形みたいなものは他にどんなものがあるか」

→ パスカルの三角形を題材として扱うことで関心をひきつけることができた。

イ 性質が成り立つことを文字を使って説明することについて

『文字を使って説明することの良さ、便利さを実感することができましたか』という質問に対し、27名中17名が「あてはまる」、9名が「ややあてはまる」を選択した。

「文字を使えば、「どんな数でも成り立つ」ということを証明できることがわかった」

「説明するときに、文字式が使えるときはすごく便利に感じた」

→ 性質を見いだしてから文字を用いて計算することで、文字式でその性質を説明できることに気付かせることができ、便利さを実感させることができた。

ウ 文字を使って性質を見いだすことについて

「7段目の数の性質を調べるには1段目の数を使って文字式に表せば求められる」

「文字式は、今まで見えなかった数字の規則性に気付けることが面白いと思った」

「数の性質を調べるときは、文字式を利用するといいと分かった」

「説明したこと以外のことも気付けることがわかった」

→ 7段目の真ん中の数の性質の他にも性質がないか発問することで、すでに発見した性質を説明するだけでなく、文字式から性質を見いだすこともできると気付かせることができた。

エ 文字式を活用しようとする姿勢について

「文字式がいろいろなことに応用できることがわかった」

「文字式というものは日常的にも使うことが出来るようなものだということを知ることが出来た」

「成り立つかどうか分からないときでは、文字式を利用して解決したいなと思った」

「パスカルの三角形以外にも文字式を利用できるものはどれくらいあるのか、また、それはどのようにして解くのが知りたいと思った」

→ 従来の『整数の性質』とは別の題材を扱うことで、文字を使って説明することの汎用性を実感させることができ、身近なことがらに活用しようとする姿勢が見られた。

オ 数学的活動に対する意欲の喚起について

「もっとたくさん規則性のある文字をあてはめ、いろいろな場合を確かめたい」

「への字の部分のさらに外側はどのような数があるのだろうか」

「文字をつかってパスカルの三角形を他の数字でも計算してみたいと思った」

「への字の部分のちがう値にして深めたい。三角形をかけ算でやってみたいと思った」

→ 題材の面白さや拡張性から、もっと他にも試してみたい、もっとよく調べて深めたい、といった意欲を喚起することができた。

(2) 課題

ア 『説明してみたい』という実感について

『数の性質について、「文字を使って説明してみたい」と感じましたか』という質問に対し、27名中11名が「あてはまる」、12名が「ややあてはまる」、4名が「あまりあてはまらない」を選択した。

→ 他の質問と比較すると若干「あまりあてはまらない」が多い。文字を使うことの良さや便利さは実感させられたが、主体的に「文字を用いて説明したい」と思える発問の工夫等を検討する必要がある。

イ 題材をどこまで広げるかについて

→ パスカルの三角形の拡張性が高い分、どこまで条件を指定してどこまで自由に考えさせるかの設定が難しい。様々に条件を変えて試させたい題材だが、1時間の授業の中で「文字を用いて説明すること」を深めさせるねらいがぼやけてしまわないように、生徒の習熟度も加味して課題を設定する必要がある。ただ、あまりにも決められた流れをなぞるだけの授業になってしまうと、この題材の良さが薄れてしまう。これらの要素を踏まえて、生徒が主体的に考える余地を残した授業構成をつくるために研究を進めていく。

6 研究のまとめと今後の課題

本研究は「パスカルの三角形」において、もとになる周りの数（指導案では「への字の部分」と表現している）から成り立つ性質について考えるというものだったが、条件の変え方について自由度が高すぎると、成り立つ性質を発見するのが難しくなったり文字を使って表す式が複雑になったりしてしまう。そのため、変える条件として「への字の部分」の左側と右側はそれぞれ一定の数にしたほうが分かりやすい（左側は2、右側は5に統一するなど）ことが分かったので、指導案はそのように改善をした。また、生徒のワークシートからは数の並びについて様々な性質が発見されていることがわかるので、広げ方についても引き続き研究していく。

また、今回は数の並びから成り立つ性質（7段目の真ん中の数は10の倍数になることなど）を主体的に文字を用いて説明することがねらいだったが、反対に文字で表された図から数の並びの性質が見えてくる（例えば、7段目の左から2つ目の式は $10a+5b$ となるので5の倍数になることがわかるなど）ことに焦点を当てた授業展開も考えられる。さらに、目的に合わせて式の形を変えること（7段目の真ん中の式は $10a+10b$ なので、10の倍数だと示すためには $10(a+b)$ という形に、2の倍数だと示すためには $2(5a+5b)$ という形に表すことなど）についても深められる題材だということが分かった。今後は、以上の2点も含めて研究を深めていきたい。

令和4年度 導入法委員会 委員名簿 (◎は代表者)					
瀧川 英知	(東久留米市立下里中学校)	高木 圭樹	(武蔵村山市立第五中学校)		
清水 義彦	(武蔵村山市立第一中学校)	川村 直也	(教育庁指導部指導企画課)		
太田 謙一	(国分寺市立第三中学校)	渡部 俊明	(昭島市立多摩辺中学校)		
西野 嘉一	(大田区立大森東中学校)	茶谷 捷	(調布市立神代中学校)		
堀越 義智	(練馬区立南が丘中学校)	岩崎 航太	(小平市立小平第二中学校)		
高橋 優太	(練馬区立中村中学校)	朴 元気	(昭島市立清泉中学校)		
種田 庸敏	(稲城市立稲城第五中学校)	藤原 哲也	(世田谷区立芦花中学校)		
◎石川 寛樹	(世田谷区立上祖師谷中学校)	風間 伸	(杉並区立神明中学校)		
辻山 登紀子	(府中市立府中第二中学校)	唐木田 充孝	(杉並区立井草中学校)		
須藤 昭彦	(武蔵野市立第五中学校)	佐野 公晃	(町田市立成瀬台中学校)		
佐々木 大典	(大田区立東調布中学校)	中村 理	(大田区立大森第八中学校)		
		下向 孝	(足立区立第一中学校)		
〈共同研究者〉					
室賀 隆夫	青木 一重	香積 信明	香積 恵子	工藤 彰久	山本 豊彦